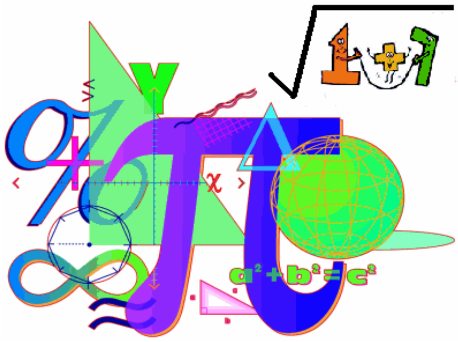


المملكة العربية السعودية

وزارة التربية والتعليم

الإدارة العامة لتعليم البنات بالمنطقة الشرقية

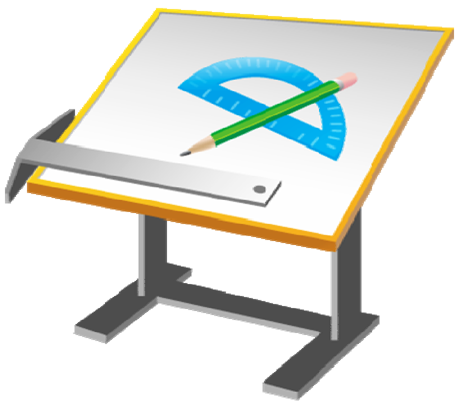
رياضيات

حساب التكامل

ثالث ثانوي علمي

الفصل الدراسي الثاني

١٤٢٩ ـ ١٤٣٠ هـ



اسم الطالبة :

الفصل :

مواضيع باب حساب التكامل

م	عنوان الدرس	رقم الصفحة
١	الدالة الأصلية (التكامل الغير محدد)	٢
٢	تطبيقات على التكامل	٥
٣	طرق التكامل	٨
٤	تدريبات على التكامل	١٥
٥	التكامل المحدد	١٧
٦	المعنى الهندسي للتكامل المحدد	٢٢
٧	بعض خواص التكامل المحدد	٢٣
٨	النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل	٢٦
٩	تمارين عامة	٢٩
١٠	تدريبات على باب حساب التكامل	٣٢
١١	تدريبات على التكامل	٣٣

تعريف الدالة الأصلية :

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ف ، فإن ل تسمى دالة أصلية للدالة د إذا تحقق الشرط :

ل َ(س) = د (س) ∀ س ∈ ف

مثال :

د (س) = ٤ س^{٣} ⟸ الدالة الأصلية للدالة د هي : ل$_{١}$ (س) = . . . أو ل$_{٢}$ (س) = . . .

بصورة عامة نكتب : ل(س) = . . . لأن ل َ(س) = ٤ س^{٣} = د (س)

ملاحظات :

- الدالة الأصلية تكون دائماً متصلة لأنها قابلة للاشتقاق
- ليس بالضرورة أن كل دالة لها دالة أصلية (انظري المثال في الكتاب صفحة ١٩٠ – ١٩١)
- إذا كان للدالة د دالة أصلية ل فإنه يوجد عدد لانهائي من الدوال الأصلية للدالة د على الصورة ل (س) + ث
- إذا كانت الدالة متصلة على فترة مغلقة فإن الدالة يكون لها دالة أصلية على هذه الفترة

مثال :

- الدالة الأصلية للدالة د (س) = ٧ هي ل(س) = . . . لأن ل َ(س) = . . .
- أثبتي أن : ل(س) = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ دالة أصلية للدالة د (س) = $\frac{- س}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$ في]-١ ، ١[

....

....

نظرية :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف ، وكانت ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ دالتين أصليتين للدالة د على ف فإنه يوجد ث ∈ ح بحيث أن : ل$_{١}$ (س) – ل$_{٢}$ (س) = ث ∀ س ∈ ف

توضيح النظرية :

إذا كانت : د (س) = ٦ س^{٥} ⟸ ل$_{١}$ (س) = س^{٦} + ٢ دالة أصلية للدالة د

كذلك : ل$_{٢}$ (س) = س^{٦} + ٩ دالة أصلية للدالة د

نلاحظ أن : ل$_{١}$ (س) – ل$_{٢}$ (س) = . . . (عدد ثابت)

ملاحظة :

يرمز للدالة الأصلية للدالة د بالرمز $\int$ د (س) ء س (ويقرأ تكامل د (س) بالنسبة لـــ س)

فإذا كانت ل (س) دالة أصلية للدالة د فإن :

$\int$ د (س) ء س = ل (س) + ث $\Longleftrightarrow$ لَ (س) = د (س)

نظرية :

- $\int$ دَ (س) ء س = د (س) + ث
- $\frac{ء}{ء س}$ $\int$ د (س) ء س = د (س)
- $\int$ أ د (س) ء س = أ $\int$ د (س) ء س $\forall$ أ $\in$ ح
- $\int$ [د١ (س) ± د٢ (س)] ء س = $\int$ د١ (س) ء س ± $\int$ د٢ (س) ء س

ملاحظة هامة : لا يوجد قاعدة لتكامل حاصل ضرب دالتين أو قسمة دالتين أو مقلوب دالة

بعض التكاملات الأساسية

١	$\int$ أ ء س = أ س + ث
٢	$\int$ س^ن ء س = $\frac{\text{س}^{\text{ن} + ١}}{\text{ن} + ١}$ + ث حيث ن $\in$ ح − { − ١ }
٣	$\int$ جتا س ء س = جا س + ث
٤	$\int$ جا س ء س = − جتا س + ث
٥	$\int$ قا² س ء س = ظا س + ث
٦	$\int$ قتا² س ء س = − ظتا س + ث
٧	$\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث
٨	$\int$ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

تذكري مشتقات الدوال الدائرية

الدالة	مشتقتها
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	قا² س
ظتا س	− قتا² س
قا س	قا س ظا س
قتا س	− قتا س ظتا س

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int (8\text{س}^{7} + 10\text{س}^{4} - 9)\ \text{ءس} =$
- $\int \frac{4}{\text{س}^{3}}\ \text{ءس} =$
- $\int 4\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} =$
- $\int (2\text{س} + 3)(5\text{س} - 1)\ \text{ءس} =$
- $\int \frac{\text{س}^{3} - 27}{\text{س} - 3}\ \text{ءس} =$
- $\int (6 + \text{جتا س})\ \text{ءس} =$
- $\int (\text{قا}^{2}\text{ س} - \text{قتا س ظتا س})\ \text{ءس} =$
- $\int (\frac{1}{4}\text{ جا س} + \text{قتا}^{2}\text{ س})\ \text{ءس} =$
- $\int \frac{\text{س}^{2} - 8\text{س} + 1}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ءس} =$

الواجب : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int (8\text{س}^{3} + \text{جا س} - \frac{1}{3}\text{ قا س ظا س})\ \text{ءس}$
- $\int \sqrt[3]{\text{س}}\ \text{ءس}$
- $\int \frac{(\text{س}^{3} - 5)^{2}}{\text{س}^{2}}\ \text{ءس}$

من حسن خلقه ، كثر محبوه ، وأنست به النفوس

أولاً : تطبيقات هندسية

- $د(س) = \int د'(س)\, ءس = \int \frac{ءص}{ءس}\, ءس$
- $د'(س) = \int د''(س)\, ءس = \int \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}\, ءس$

د (س)

اشتقاق $\downarrow$ د َ(س) $\uparrow$ تكامل

د ً(س)

مثال(١) : إذا كانت $د'(س) = ٢ \text{ جتا } س - ٣ \text{ جا } س$ أوجدي د (س) علما بأن $د\left(\frac{ط}{٢}\right) = \sqrt{٣}$

مثال(٢) : أوجدي معادلة المنحنى د (س) الذي يمر بالنقطة (١ ، ٣) وميل العمودي على المماس عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{١}{١٠س}$

صاحب الأخيار تأمن من الأشرار

مثال(٣): إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) يساوي ٦ (س – ٢) فاوجدي معادلة المنحنى علما بأن المنحنى يمر في النقطة (٢، ٧) وميله عند س = ٥ يساوي ٩

ثانياً : تطبيقات فيزيائية

- السرعة : ع = ∫ ت ءن = ∫ التسارع بالنسبة للزمن
- المسافة : ف = ∫ ع ءن = ∫ السرعة بالنسبة للزمن

اشتقاق: ف ← ع ← ت
تكامل: ت ← ع ← ف

مثال(١) : إذا كان ت = ٦ ن – ٦ أوجدي السرعة علما بأن ع = ٣ م/ث عندما ن = ٤ث

مثال(٢) : يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة ع = ٣ ن^{٢} + ٤ ن فإذا كانت الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل ، أوجدي :

- المسافة التي قطعها الجسيم بعد ثلاث ثوان .

- تسارع الجسيم بعد خمس ثوان .

الواجب :

(١) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) يساوي ٣س^{٢} + ٢س + ٥ فاوجدي معادلة المنحنى علما بأن المنحنى يمر في النقطة (−١، ٥)

(٢) يتحرك جسيم في خط مستقيم حسب العلاقة ت = ٣ (٤ ن − ١) ، أوجدي السرعة والمسافة علما بأن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل بسرعة ٨ م/ث

العلم مصباح العقل وينبوع الفضل

أولاً : تكامل (دالة من الدرجة الأولى)$^{\text{ن}}$

$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{ءس} =$ . . . . حيث $\text{ن} \neq -١$

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int (٧\text{س} + ٤)^{٩} \, \text{ءس} =$ ....

- $\int \dfrac{١}{(٣\text{س} + ٥)^{٢}} \, \text{ءس}$

....

....

- $\int \sqrt[٥]{(١ - ٢\text{س})^{٧}} \, \text{ءس}$

....

....

ثانياً : تكامل دالة دائرية زاويتها من الدرجة الأولى

- $\int \text{جا}\,(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ءس} =$ . . . .
- $\int \text{قتا}^{٢}\,(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ءس} =$ . . . .
- $\int \text{قا}\,(\text{أس} + \text{ب})\,\text{ظا}\,(\text{أس} + \text{ب}) \, \text{ءس} =$ . . . .

بالمثل لبقية الدوال الدائرية

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int \text{جتا}\,(٢ - ٤\text{س}) \, \text{ءس} =$ ....
- $\int \text{قتا}\,٧\text{س}\ \text{ظتا}\,٧\text{س} \, \text{ءس} =$ ....
- $\int \text{قا}^{٢}\,(\tfrac{٣}{٥}\text{س} + ٩) \, \text{ءس} =$ ....

ثالثاً : التكامل بالتعويض

خطوات التكامل بالتعويض :

١) نفرض دالة ص بدلالة س

٢) نشتق ص بالنسبة لـ س لايجاد ء س

٣) من الفرض نوجد س بدلالة ص

٤) نعوض في التكامل

٥) نفك الأقواس ثم نكامل

٦) نعوض عن ص بدلالة س

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

❖ $\int س \sqrt{٣ - س} \; ء س$

❖ $\int (س - ٢)^{٢} (س - ٥)^{٧} \; ء س$

الواجب : أوجدي التكاملات التالية :

① $\int (٨ س - ١)^{٤} \; ء س$

② $\int \sqrt{٣ + ٩ س} \; ء س$

③ $\int قا (٢ - ٥س) \; ظا (٢ - ٥س) \; ء س$

④ $\int (٧ + جا \frac{١}{٣} س) \; ء س$

⑤ $\int (س + ٤) \sqrt{٦ - س} \; ء س$

⑥ $\int س (٢س + ١)^{٥} \; ء س$

رابعاً : تكامل مربعات الدوال المثلثية

من جدول التكاملات الأساسية :

- $\int$ قا^{٢} س ء س = ظا س + ث
- $\int$ قتا^{٢} س ء س = − ظتا س + ث

ولايجاد تكامل بقية مربعات الدوال المثلثية نستخدم المتطابقات التالية :

- جا^{٢} س = ...
- ظا^{٢} س = ...
- جتا^{٢} س = ...
- ظتا^{٢} س = ...

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int$ جتا^{٢} س ء س
- $\int$ ظا^{٢} ٦س ء س
- $\int$ قتا^{٢} $\frac{٥}{٧}$ س ء س
- $\int$ قا^{٢} (٢ − س) ء س
- $\int$ ظتا^{٢} (٣ س + ١) ء س
- $\int$ جا^{٢} (٤س − ٩) ء س

خامساً : تكامل (دالة)^{ن} × مشتقة الدالة

$\int$ [د(س)]^{ن} × دَ(س) ء س = ... حيث ن ≠ − ١

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int$ ٥ س^{٤} (س^{٥} + ٣)^{٨} ء س
- $\int$ س^{٢} $\sqrt[٥]{س^{٣} + ٧}$ ء س

❖ $\int \frac{\text{٣ س} - ١}{\sqrt{\text{٣س}^{٢} - \text{٢ س} + ٤}} \; \text{ءس}$

❖ $\int (\text{ظا س} - ٦)^{٥} \; \text{قا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس}$

❖ $\int \text{ظتا}^{٣}\text{س} \; \text{قتا}^{٢}\text{س} \; \text{ءس}$

❖ $\int \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا}^{٣}\text{٢س}} \; \text{ءس}$

الواجب : أوجدي التكاملات التالية :

① $\int \text{ظتا}^{٢} \frac{١}{٤}\text{س} \; \text{ءس}$

② $\int \text{جا}^{٢}(٥ - \text{٤س}) \; \text{ءس}$

③ $\int \frac{\text{س}^{٥} - ١}{(\text{س}^{٦} - \text{٦ س} + ٤)^{٢}} \; \text{ءس}$

④ $\int \text{٣ س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٧} \; \text{ءس}$

⑤ $\int \text{جتا ٥س} \; (\text{٢ جا ٥س} + ٨)^{٦} \; \text{ءس}$

⑥ $\int \sqrt{\text{س}} \; (\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٧)^{٩} \; \text{ءس}$

من رضي بالمقدور ، اكتفى بالميسور

بالمثل لبقية الدوال الدائرية

سادساً : تكامل دالة دائرية × مشتقة زاويتها

- ∫ دَ(س) جتا د(س) ء س = ...
- ∫ دَ(س) قا^{٢} د(س) ء س = ...
- ∫ دَ(س) قتا د(س) ظتا د(س) ء س = ...

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

❖ ∫ ٣ س^{٢} جا س^{٣} ء س = ...

❖ ∫ $\frac{١}{٧}$ ص^{٤} قا ٢ص^{٥} ظا ٢ص^{٥} ء ص

....

....

❖ ∫ $\dfrac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$ ء س

....

....

م جذر معامل س^{٢}

ب جذر الحد الثابت

سابعاً : تكاملات تحتوي على جذور على الصورة

- $\sqrt{\text{ب}^{٢} - \text{م}^{٢}\text{س}^{٢}}$ نستخدم التعويض . . . .
- $\sqrt{\text{م}^{٢}\text{س}^{٢} - \text{ب}^{٢}}$ نستخدم التعويض . . . .
- $\sqrt{\text{م}^{٢}\text{س}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$ أو $\dfrac{\text{ثابت}}{\text{م}^{٢}\text{س}^{٢} + \text{ب}^{٢}}$ نستخدم التعويض . . . .

مثلاً : لايجاد :

❖ ∫ $\sqrt{٤٩ - ٩\text{س}^{٢}}$ ء س   نستخدم التعويض . . . .

❖ ∫ $\dfrac{\sqrt{٥\,\text{س}^{٢} - ٤}}{\text{س}}$ ء س   نستخدم التعويض . . . .

❖ ∫ $\dfrac{\text{ء ص}}{٢٥\text{ص}^{٢} + ٧}$ ء س   نستخدم التعويض . . . .

متطابقات هامة :

- ١ – جا^{٢} س = جتا^{٢} س
- جا٢س = ٢ جا س جتا س
- قا^{٢} س – ١ = ظا^{٢} س
- ظا^{٢} س + ١ = قا^{٢} س

مثال : أوجدي التكاملات التالية :

❖ $\int \sqrt{١٦ - ٩س^٢}\ ءس$

❖ $\int \frac{\sqrt{ص^٢ - ٩}}{ص}\ ءص$

❖ $\int \frac{ء س}{٣ س^٢ + ٤}$

❖ $\int س \sqrt{٤٩ - ٤ س^٢} \; ء س$

الواجب : أوجدي التكاملات التالية :

① $\int س \text{ جتا } (س^٢ - ١) \; ء س$

② $\int \frac{١}{س^٢} \text{ قا}^٢ \frac{٣}{س} \; ء س$

③ $\int \frac{س^٢}{\sqrt{٤ - س^٢}} \; ء س$

④ $\int \frac{٢}{٩ س^٢ + ١} \; ء س$

خلب الأدب خير من خلب الذهب

أوجدي التكاملات التالية :

- $\int \sqrt[\text{٣}]{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ء س}$

- $\int (\text{س} + \text{٥})\sqrt{\text{س} + \text{٥}}\ \text{ء س}$

- $\int \left(\frac{\text{١}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\,\text{س}} + \frac{\text{٤}}{\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{س}} \right) \text{ء س}$

- $\int \frac{\text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٢٧}}{\text{س} - \text{٣}}\ \text{ء س}$

- $\int (\text{٦} + \text{٧ ظا}^{\text{٢}}\,\text{٣س})\ \text{ء س}$

- $\int (\text{س} + \text{٢ جتا}^{\text{٢}}\,\text{٥س})\ \text{ء س}$

- $\int \frac{\text{ظتا}^{\text{٥}}\,\text{س قتا س}}{\text{جا س}}\ \text{ء س}$

- $\int (\text{س}^{\text{٢}} - \text{٥س} + \text{٣})(\text{٤س} - \text{١٠})\ \text{ء س}$

- $\int \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\sqrt{\text{س}}\,(\text{س} - \text{٢})}\ \text{ء س}$

- $\int \frac{ص}{\sqrt[٣]{ص^{٢} - ٣}} \, ء ص$

- $\int \frac{١}{ظا ٢س \ جا ٢س} \, ء س$

- $\int \frac{١ + جا س}{جتا^{٢} س} \, ء س$

- $\int \frac{جا^{٢} س}{١ + جتا س} \, ء س$

- $\int \frac{ء ص}{\sqrt{٥ - ٤ ص^{٢}}}$

الواجب : أوجدي التكاملات التالية :

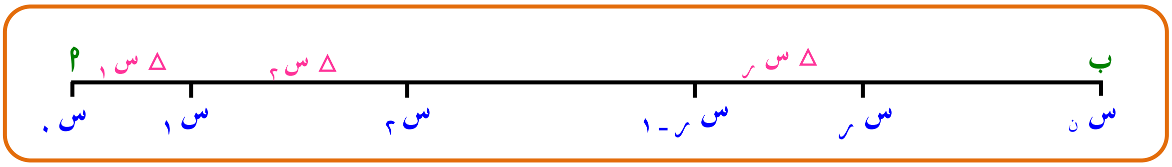
① $\int (١ + جا^{٢} س)^{٥} \ جا ٢س \ ء س$

② $\int \frac{١}{١ + جتا س} \, ء س$

③ $\int \frac{(\sqrt{س} + ٥)^{٧}}{\sqrt{س}} \, ء س$

④ $\int \frac{ء س}{س \sqrt{س^{٢} - ٤٩}}$

أولاً : تجزيء الفترة [٩ ، ب]



نقسم الفترة [٩ ، ب] إلى ن من الفترات الجزئية فيكون عدد نقط التجزيء = ن + ١

التقسيم الناتج يسمى تجزيء للفترة [٩ ، ب] ونرمز له بالرمز ت ن (٩ ، ب) ونكتب :

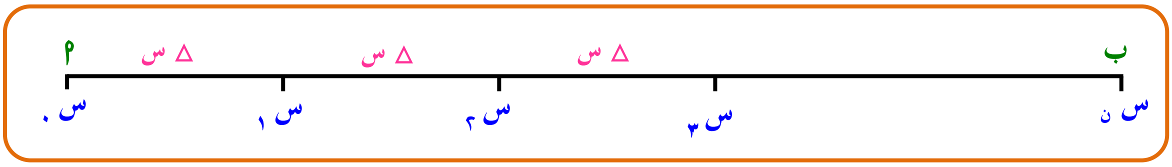
ت ن (٩ ، ب) = (س ٠ ، س ١ ، س ٢ ، . . . ، س ر-١ ، س ر ، . . . ، س ن)

الفترات الجزئية :

- [س ٠ ، س ١] وطولها Δ س ١ = س ١ − س ٠
- [س ١ ، س ٢] وطولها Δ س ٢ = س ٢ − س ١
- [س ر-١ ، س ر] وطولها Δ س ر = س ر − س ر-١

أطول فترة من الفترات الجزئية تسمى معيار التجزيء ... ويرمز لها بالرمز || ت ن ||

التجزيء المنتظم : هو التجزيء الذي تكون فيه أطوال الفترات متساوية



في التجزيء المنتظم :

- طول أي فترة : Δ س = (ب − ٩) / ن = الطول الكلي للفترة / عدد الفترات
- نقط التجزيء : س ٠ = ٩ ، س ١ = ٩ + Δ س ، س ٢ = ٩ + ٢ Δ س ، . . .
  أي أن : س ر = ٩ + ر Δ س
- الصورة العامة للتجزيء المنتظم :

ت ن (٩ ، ب) = (٩ ، ٩ + Δ س ، ٩ + ٢ Δ س ، . . . ، ٩ + ر Δ س ، . . . ، ب)

مثال :

٩) أوجدي التجزيء المنتظم للفترات التالية :

- ت ٨ (٥ ، ٧) = ...
- ت ٤ (١ ، ٥) = ...

ب) أملئي الفراغ : إذا جزئنا الفترة [−٢ ، ١٣] تجزيئاً منتظماً بحيث Δ س = ١/٢ فإن :

عدد الفترات الجزئية = . . . ، عدد نقط التجزيء = . . .

....

ثانياً : مجموع ريمان

يعرف مجموع ريمان للدالة د (س) المناظر للتجزيء ت$_{ن}$ (٩ ، ب) كالتالي :

$$\text{مجموع ريمان} = \sum_{ر=١}^{ن} د(ج_{ر})\, \Delta س_{ر}$$

ملاحظات :

- يعتمد مجموع ريمان على :
  - ن = عدد الفترات
  - Δ س$_{ر}$ = أطوال الفترات
  - د (ج$_{ر}$) = قيمة الدالة عند نقط اختيارية داخل كل فترة.
- المعنى الهندسي لمجموع ريمان : هو مجموع مساحة المستطيلات التي :
  - عرضها = طول الفترة
  - طولها = قيمة الدالة عند النقط الاختيارية.

(توضيح بالرسم : انظري الكتاب صفحة ٢١٨)

مثال :

أوجدي مجموع ريمان للدالة د(س) = س^{٢} المناظر للتجزيء ت$_{٤}$ (٠ ، ٣) = (٠، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٩}{٤}$ ، ٣)

(اختاري : ج$_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ج$_{٢}$ = ١ ، ج$_{٣}$ = ١ $\frac{١}{٢}$ ، ج$_{٤}$ = ٢ $\frac{١}{٢}$)

مجموع ريمان = ...

الفترات الجزئية هي : ....

....

....

الواجب : أوجدي مجموع ريمان للدالة د(س) = $\sqrt{س}$ المناظر للتجزيء ت$_{٣}$ (٠ ، ٢) = (٠، $\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢)

حيث : ج$_{١}$ = $\frac{١}{٤}$ ، ج$_{٢}$ = ١ ، ج$_{٣}$ = $\frac{١٦}{٩}$

ثالثاً : بعض قوانين المجموع

- $\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر + ص_ر) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر + \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر$
- $\sum_{ر=1}^{ن} ك ر = ك \sum_{ر=1}^{ن} ر$
- $\sum_{ر=1}^{ن} ك = ن ك$
- $\sum_{ر=1}^{ن} ر = \frac{ن(ن+1)}{2}$

رابعاً : التكامل المحدد (التكامل على فترة)

إذا كانت الدالة د معرفة ومحدودة في [؟ ، ب] ، وكانت $\lim_{ن \to \infty}$ مجموع ريمان موجودة فيعرف التكامل المحدد كالتالي :

$$\int_{؟}^{ب} د(س) \, ءس = \lim_{||ت_ن|| \to 0} \sum_{ر=1}^{ن} د(جـ_ر) \Delta س_ر$$

أي أن : $\int_{؟}^{ب} د(س) \, ءس = \lim_{ن \to \infty}$ مجموع ريمان

ملاحظات :

- يعتمد التكامل المحدد على : • قاعدة الدالة د (س)
  • حدود التكامل ؟ ، ب
- $\lim_{ن \to \infty}$ مجموع ريمان غير موجودة ⟸ الدالة غير قابلة للتكامل
- التكامل المحدد لا يعتمد على المتغير الذي يعبر عن الدالة

أي أن : $\int_{؟}^{ب} د(س) \, ءس = \int_{؟}^{ب} د(ص) \, ءص = \int_{؟}^{ب} د(ع) \, ءع$

مثلاً : $\int_{1}^{5} 3س^2 \, ءس = \int_{1}^{5} 3ص^2 \, ءص = \int_{1}^{5} 3ع^2 \, ءع$

نظرية :

إذا كانت الدالة د متصلة في الفترة المغلقة [؟ ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل في هذه الفترة .

ملاحظات :

- كل كثيرات الحدود قابلة للتكامل لأنها متصلة .
- إذا كانت الدالة قابلة للتكامل فليس من الضروري أن تكون متصلة .
- الاتصال ليس شرطاً ضرورياً لقابلية التكامل .

مثال(١) : باستخدام التعريف كنهاية لمجموع ريمان أوجدي : $\int_{٢}^{٥}$ (٣ س + ٢) ء س

- الدالة . . . . متصلة لأنها كثيرة حدود ⟸ الدالة . . . . في الفترة . . . .
- $\int_{٢}^{٥}$ (٣ س + ٢) ء س = ...
- نجزئ الفترة . . . . تجزيئاً منتظماً فيكون :

* طول أي فترة : Δ س = ...
* نقط التجزيء : س $_{ر}$ = أ + ر Δ س = ...
* للسهولة نختار : جـ $_{ر}$ = س $_{ر}$

مثال(٢) : باستخدام التعريف كنهاية لمجموع ريمان أوجدي : $\int_{-٣}^{٤}$ ٥ ء س

- الدالة . . . . متصلة لأنها كثيرة حدود ⟸ الدالة . . . . في الفترة . . . .
- $\int_{-٣}^{٤}$ ٥ ء س = ...
- نجزئ الفترة . . . . تجزيئاً منتظماً فيكون :

* طول أي فترة : Δ س = ...
* نقط التجزيء : س $_{ر}$ = أ + ر Δ س = ...
* للسهولة نختار : جـ $_{ر}$ = س $_{ر}$

مثال(٣) : عللي لما يلي :

- الدالة $د(س) = \sqrt{٩ - س^٢}$ غير قابلة للتكامل في الفترة [٢ ، ٥]

- الدالة $د(س) = \sqrt{٣ - س}$ غير قابلة للتكامل في الفترة [٠ ، ٦]

نظرية هامة :

$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \left[ل(س) \right]_{أ}^{ب} = ل(ب) - ل(أ)$ حيث ل دالة أصلية للدالة د

ملاحظات :

- $\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = -\int_{ب}^{أ} د(س)\, ءس$
- $\int_{أ}^{أ} د(س)\, ءس =$ صفر

مثلاً :

- $\int_{٢}^{٦} د(س)\, ءس = ٩$

$\Leftarrow \int_{٦}^{٢} د(س)\, ءس = ...$

- $\int_{٥}^{٥} د(س)\, ءس = ...$

الواجب : باستخدام التعريف كنهاية لمجموع ريمان أوجدي :

① $\int_{-١}^{٥} (٢س - ٤)\, ءس$ ② $\int_{٢}^{٧} -٣\, ءس$

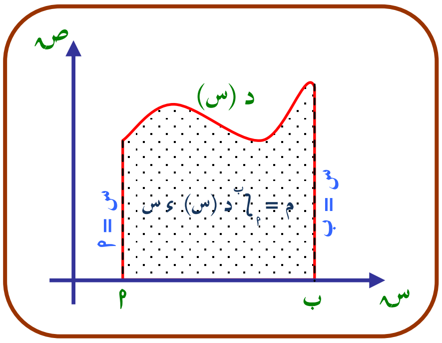
المعنى الهندسي للتكامل المحدد :

بفرض أن د (س) > ٠ في الفترة [٩ ، ب]

(أي أن منحنى الدالة فوق محور السينات في هذه الفترة) فإن :

∫ (من ٩ إلى ب) د (س) ء س = المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين س = ٩ ، س = ب

= المساحة بين المنحنى والفترة [٩ ، ب]



مثال (١) :

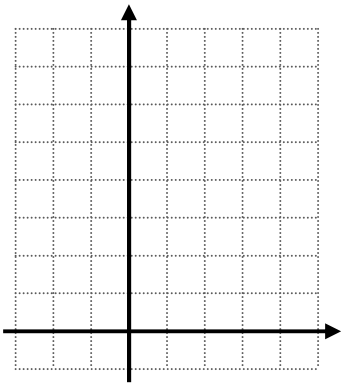
٩) أوجدي ∫ (من -٢ إلى ٤) (س + ٣) ء س

....

ب) أوجدي المساحة بين منحنى د (س) = س + ٣ والفترة [-٢ ، ٤]

نرسم منحنى الدالة د (س) = س + ٣ في الفترة [-٢ ، ٤]

س		
ص		



....

....

ج) قارني بين النتيجتين

....

مثال(٢) : أوجدي المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د (س) = | ٢س − ٦ | والفترة [١ ، ٣] بطريقتين

الطريقة الأولى : بالتكامل

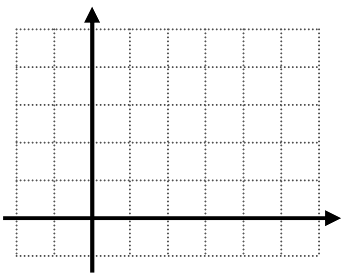
....

....

....

الطريقة الثانية : بالرسم

س			
ص			



....

....

الواجب : أوجدي المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د (س) = ٢س والفترة [٢ ، ٥] بطريقتين

نظريات :

- $\int_{أ}^{ب} ك\, د(س)\, ءس = ك \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$
- $\int_{أ}^{ب} (د_{١} \pm د_{٢})(س)\, ءس = \int_{أ}^{ب} د_{١}(س)\, ءس \pm \int_{أ}^{ب} د_{٢}(س)\, ءس$
- بفرض أن ج $\in$ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{أ}^{ج} د(س)\, ءس + \int_{ج}^{ب} د(س)\, ءس$$

مثال : احسبي التكاملات التالية :

◆ $\int_{١}^{٣} -٩س^{٢}$

◆ $\int_{-١}^{١} (٢س + [س])\, ءس$

نظرية :

إذا كانت د١ ، د٢ دالتين قابلتين للتكامل في [أ ، ب] وكانت د١ $\le$ د٢ في [أ ، ب] فإن :

$$\boxed{\int_{أ}^{ب} د_{١}(س)\, ءس \le \int_{أ}^{ب} د_{٢}(س)\, ءس}$$

مثال : بدون إيجاد قيمة التكامل بيني أن : $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{س}\, ءس \le \int_{٢}^{٤} \frac{٢}{س^{٢}}\, ءس$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت د (س) متصلة في [ا ، ب] ، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد س. ∋ [ا ، ب] بحيث :

$$\int_{ا}^{ب} د(س)\, ء س = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

مثال(١) : أوجدي س. التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{.}^{٢} (٢س + ٤)\, ء س$

مثال(٢) : املئي الفراغ :

قيمة س. التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{.}^{٩} \frac{١}{\sqrt{س}}\, ء س$

مثال(٣) : عللي :

لا يمكن تطبيق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة د(س)= $\frac{س + ٣}{س^٢ - ١٦}$ في الفترة [٣ ، ٧]

مثال(٤) : املئي الفراغ :

- إذا كانت الدالة د (س) متصلة في الفترة [٢ ، ٥] وكانت د (س.) = ٧ حيث س. ∈ [٢ ، ٥]
  فإن : $\int_{٢}^{٥}$ د (س) ء س = ...

- إذا كانت الدالة د (س) متصلة في [−١ ، ب] وكانت د (س.) = ٤ حيث س. ∈ [−١ ، ب]
  وكان : $\int_{-١}^{ب}$ د (س) ء س = ٣٢ فإن ب = . . .

الواجب :

① بدون إيجاد قيمة التكامل بيني أن : $\int_{١}^{٣}$ س^٢ ء س ⩾ $\int_{١}^{٣}$ س ء س

② أوجدي س. التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{١}^{٩} \frac{٣}{س^٢}$ ء س

③ **املئي الفراغ :**

إذا كان : $\frac{١}{٥}\int_{١}^{٧}$ د (س) ء س = ٣ ك وكانت د (س.) = ١٠ حيث س. هي القيمة التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل $\int_{١}^{٧}$ د (س) ء س فإن ك = . . .

من زرع خيرا ، حصد أجرا

النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل - الجزء الأول :

إذا كانت د (س) متصلة في الفترة [أ ، ب] وكانت ي(س) دالة معرفة بالصورة :

ي(س) = $\int_{أ}^{س}$ د (ع) ءع   حيث   س ∈ [أ ، ب]

فإن $\boxed{\text{ي}َ\text{(س)} = \ldots\ldots\ldots}$

مثال : أوجدي :

$\int_{1}^{س} \frac{ءص}{\sqrt{ص^2 + 1}}$

....

....

....

....

النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل - الجزء الثاني :

إذا كانت د (س) متصلة في الفترة [أ ، ب] وكانت ل(س) دالة أصلية للدالة د

فإن $\boxed{\int_{أ}^{ب} \text{د (س) ءس} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

ملاحظة : $\int_{أ}^{س}$ د (ع) ءع حيث الحد العلوي للتكامل متغير هو دالة أصلية للدالة د

مثال : احسبي التكاملات التالية :

- $\int_{0}^{1} \frac{س^3 + 1}{س + 1}$ ءس

....

....

- $\int_{3}^{6} \sqrt{س - 2}$ ءس

....

....

- $\int_{٠}^{٢} \frac{(\sqrt{٢}\,\text{س} + ١)(\sqrt{٢}\,\text{س} - ١)}{\text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

- $\int_{٠}^{٣} \text{س}\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}\ \text{ءس}$

- $\int_{٠}^{١} \sqrt[٣]{(٢\text{س} - ١)^{٢}}\ \text{ءس}$

- $\int_{\frac{\text{ط}}{٦}}^{\frac{\text{ط}}{٣}} \text{ظا س قا}^{٢}\text{س ءس}$

- $\int_{٠}^{٢} |\text{س}^{٢} - ٤|\ \text{ءس}$

- $\int_{٠}^{\frac{\text{ط}}{٣}} \text{جتا}^{٣}\text{س جا س ءس}$

- $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٢س} - [\text{س}])^{\text{٥}} \, \text{ءس}$

- $\int_{\text{٢}}^{\text{٣}} \frac{\text{س}}{(\text{س} - \text{١})^{\text{٣}}} \, \text{ءس}$

- $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}} \, \text{ءس}$

الواجب : احسبي التكاملات التالية :

① $\int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}}{\text{٥ س} - \text{١٠}} \, \text{ءس}$

② $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} (\text{٣} + [\text{س}]) \, \text{ءس}$

③ $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \frac{\text{س}}{(\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٣})^{\text{٣}}} \, \text{ءس}$

④ $\int_{\text{٠}}^{\frac{\text{ط}}{\text{٤}}} \text{ظا}^{\text{٢}} \text{س} \, \text{ءس}$

⑤ $\int_{\text{٣}}^{\text{٤}} \text{س} (\text{س} - \text{٥})^{\text{٥}} \, \text{ءس}$

⑥ $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{١٦} - \text{س}^{\text{٢}}}} \, \text{ءس}$

السؤال الأول : املئي الفراغ :

◆ $\int_{٢}^{٩} ٣\,د(س)\,ءس = ١٨$ ، $\int_{٤}^{٢} د(س)\,ءس = ٣$ $\Leftarrow$ $\int_{٤}^{٩} ٥\,د(س)\,ءس = . . .$

◆ $\int_{٤}^{م} س\,ءس = ١٠$ $\Leftarrow$ $م = . . .$

◆ إذا كان $ت_{١٢}$ $(-١ ، ٧)$ تجزيء منتظم فإن $س_{٩} = . . .$

◆ التعويض المناسب لإيجاد $\int \sqrt{٢٥س^{٢} - ٩}\,ءس$ هو . . .

◆ $\int_{١}^{٢} \frac{|س|}{س^{٢}}\,ءس = . . .$

◆ $\int_{٢}^{٥} د(س)\,ءس = ٥$ ، $\int_{٢}^{٥} [\,٢\,د(س) - ٣\,هـ(س)\,]\,ءس = -٢$ $\Leftarrow$ $\int_{٢}^{٥} هـ(س)\,ءس = . . .$

◆ إذا كان $\int_{١}^{س} د(ع)\,ءع = ٤س^{٣} - ٤$ فإن $د(س) = . . .$

عنوان الدرس :   التاريخ :   /   /   ١٤ هـ

السؤال الثاني : إذا كان ميل المماس لمنحنى ص عند أي نقطة عليه يساوي $\frac{٣س + ١}{٢\sqrt{س}}$ فاثبتي أن :

ص^٢ = س (س + ١)^٢ علماً بأن المنحنى يمر بالنقطة (٤ ، ١٠)

السؤال الثالث : إذا كانت دَ(س) = $\sqrt{ك\, س}$ فاوجدي ك علماً بأن المنحنى يمر بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٢ ، ٥)

السؤال الرابع : أوجدي التكاملات التالية :

- $\int$ (ظا س + ظا^٣ س) ء س

- $\int \frac{ء س}{\sqrt{س + ١} + \sqrt{س}}$ ء س

- $\int \text{قتا}^{٧}\text{س}\ \text{ظتا س}\ \text{ء س}$

- $\int \text{جا ٢س}\ \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س} + ١}\ \text{ء س}$

- $\int \text{س}^{-٢}\left(٧ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} \text{ء س}$

- $\int \frac{\text{جا}^{٣}\text{س}}{\text{جتا}^{٥}\text{س}}\ \text{ء س}$

- $\int_{-١}^{٠} \frac{١}{\text{س}} \sqrt{٢\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢}}\ \text{ء س}$

- $\int \frac{\left(\text{س}^{\frac{١}{٣}} + ٩\right)^{٣}}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}\ \text{ء س}$

من صدقت لهجته ، صحت حجته

تدريبات على باب حساب التكامل

	املئي الفراغات التالية	
١	الدالة الأصلية للدالة $د(س) = س^{٤} قا^{٢} س^{٥}$ هي . . .	$\frac{١}{٥} ظا س^{٥} + ث$
٢	$د(١) = ٥$ ، $د(٣) = ٩$ ⇐ $\int_{١}^{٣} دَ(س) = . . .$	٤
٣	$\int_{-٣}^{٢} د(س)\, ءس = ٦$ ⇐ $\int_{٢}^{-٣} [٥ + ٢ د(س)] = . . .$	-٣٧
٤	$\frac{ء}{ءس}(أس^{٢} - ب س) = ٥$ عند $س = -١$ ، $\int_{٠}^{١} (٢أ س + ب)\, ءس = -٣$ ⇐ $أ = . . .$ ، $ب = . . .$	$أ = -٢$ $ب = -١$
٥	إذا كانت $ع = ن^{٢} + ١$ فإن المسافة خلال الفترة من $ن = ١$ إلى $ن = ٤$ تساوي . . .	٢٤
٦	$\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} + ٢س + ١)\, ءس = \int_{٠}^{أ} (س - ٦)\, ءس$ ⇐ $أ = . . .$	$أ = ٤$ أو $أ = -٢$
٧	$\frac{ءص}{ءس} + جا س = ٠$ ، $د(٠) = ٢$ ⇐ $ص = . . .$	جتاس + ١
٨	$\int_{٣}^{٥} د(س)\, ءس = ٧ \times ٥^{٣} - ٧ \times ٣^{٣}$ ⇐ $د(س) = . . .$	$٢١ س^{٢}$

	بيني صحة أم خطأ ما يلي مع التعليل	
١	$\int_{٢}^{٥} [٢د(س) - ٣ ن(س)]\, ءس = -٢$ ، $\int_{٢}^{٥} د(س)\, ءس = ٥$ ⇐ $\int_{٢}^{٥} د(س)\, ءس = ٤$	✓
٢	إذا كانت (٤ ، ١) نقطة حرجة للدالة ص ، وكانت $صً = ١ - \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ فإن ميل المنحنى عند أي نقطة عليه يساوي $س - \sqrt{س} - ٢$	✓
٣	$\int_{-٣}^{٣} \sqrt{١ + \lvert س \rvert}\, ءس = \frac{٢٨}{٣}$	✓
٤	$\int_{١}^{ب} ٣ س^{٢}\, ءس = ٧$ ، $\int_{جـ}^{ب} ٣ س^{٢}\, ءس = -١٩$ ⇐ $٢جـ - ب = ١$	✗

	تمارين	
١	أوجدي معادلة المنحنى الذي ميله عند أي نقطة عليه يساوي $٢ س + ١$ ويمس المستقيم $ص = ٣ س + ١$	$ص = س^{٢} + س + ٢$
٢	إذا كان معدل تغير ميل المماس لمنحنى هو $٦ س + ٨$ ، أوجدي معادلة المنحنى علماً بأنه يقطع من محور الصادات الموجب طولاً قدره ٢ وميل المماس له عند هذه النقطة يساوي ٦	$ص = س^{٣} + ٤س^{٢} + ٦س + ٢$
٣	أوجدي كثيرة حدود من الدرجة الأولى بحيث : $\int_{-١}^{١} د(س)\, ءس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} د(س)\, ءس = ٢$	$د(س) = -\frac{١}{٢} س + ٢$

تدريبات على التكامل

- $\int \frac{(\text{س}^{٣} - ١)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$
- $\int \left(٢ \,\text{جتا س} + \frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}}\right) \text{ء س}$
- $\int \left(\frac{٣}{\sqrt{\text{ص}}} - \frac{١}{\text{ص}^{٢}}\right) \text{ء ص}$
- $\int (١ + \text{جتا س})(\text{جتا س} + \text{جا}^{٢}\,\text{س}) \, \text{ء س}$
- $\int \left(\frac{١}{٢}\,\text{جتا ٣س} + ٣\,\text{قا}^{٢}\,\text{٤س}\right) \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{٣س}}{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٤}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{٣ص}^{٢} - ١}{\text{ص}\sqrt{\text{ص}}} \, \text{ء س}$
- $\int \text{جتا}^{٣}\,\text{٧ س} \, \text{ء س}$
- $\int \text{س}^{٨} \left(٢ - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٨} \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{قا س جا س}}{\sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\,\text{س}}} \, \text{ء س}$
- $\int \text{جا}^{\frac{١}{٢}}\,\text{س} \sqrt{\text{ظا س}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{١ + \text{جا س}}{\text{جتا}^{٢}\,\text{س}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{جا}^{٢}\,\text{س}}{١ + \text{جتا س}} \, \text{ء س}$
- $\int (\text{قا س} + \text{ظا س})^{٢} \, \text{ء س}$
- $\int (\text{ظا}^{٣}\,\text{ص} + \text{ظا ص}) \, \text{ء ص}$
- $\int \frac{\text{ص} + ٢}{\text{ص}^{٣} + \text{٢ص}^{٢}} \, \text{ء ص}$
- $\int \sqrt{\text{س}\sqrt{\text{س}}} \, \text{ء س}$
- $\int (١ + \sqrt{\text{جتا س}})^{٢} \,\text{جا س} \, \text{ء س}$
- $\int \left[\frac{\text{قا س}}{١ + \text{ظا س}}\right]^{٢} \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{س}}{(٤ - \text{٣ س})^{٧}} \, \text{ء س}$
- $\int \sqrt{\text{س}} \,(\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٤)^{-٣} \, \text{ء س}$
- $\int \sqrt{\text{ص}} \,(\text{٢ص} - ٣) \, \text{ء ص}$
- $\int \text{ظتا س قتا}^{٥}\,\text{س} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{١}{(١ + \sqrt{\text{س}})^{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{(٢\,\text{جا ص} + ١)\,\text{جتا ص}}{\sqrt{\text{جا}^{٢}\,\text{ص} + \text{جا ص} + ١}} \, \text{ء س}$
- $\int (\text{ص} + ١٢)^{٨} \, \text{ء ص}$
- $\int \left(١ + \text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٩} \left(١ + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ء س}$
- $\int \frac{(\text{س}^{٢} - ١٦)(\text{٢س} + ٣)}{\text{س} + ٤} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{٢ص ء ص}}{٩ + \text{ص}^{٢}}$
- $\int \frac{\text{ظا س}}{\text{قا س}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{\text{ظتا}^{٤}\,\text{س}}{\text{جا}^{٢}\,\text{س}} \, \text{ء س}$
- $\int \text{ص}^{٢}\,\text{جتا ص}^{٣} \, \text{ء ص}$
- $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\sqrt{١٦ - \text{س}^{٢}}} \, \text{ء س}$
- $\int \frac{(\text{قا س} - \text{س})(\text{قا س} + \text{س})}{(٣\,\text{ظا س} - \text{س}^{٣})^{٥}} \, \text{ء س}$
- $\int \text{جتا}^{٤}\,(\text{٢س} + ٥)\,\text{جا}\,(\text{٢س} + ٥)$