المملكة العربية السعودية

وزارة المعـــــارف

الإدارة العامة للتعليم بمنطقة الرياض

بسم الله الرحمن الرحيم

قام بإعداد و تأليف وحل هذه التمارين

الأستاذ فهد محمود أحمد عكاري	**ثانوية ابن المنذر**
الأستاذ عبد السلام محمد عبد العال العسراوي	**ثانوية الشمس الأهلية**
الأستاذ حسين محمد غازي	ثانوية الملك فهد
الأستاذ زكريا علي أحمد عفيفي	ثانوية الإمام الشافعي
الأستاذ على حسن علي العريان	ثانوية الإمام الشافعي
الأستاذ محمد عمار السباعي	ثانوية الماوردي
الأستاذ السيد محمود عوض المتيم	ثانوية محمد الفاتح
الأستاذ عبد الرحمن إبراهيم موسى	ثانوية الماوردي
الأستاذ حسن أحمد الأحمد	ثانوية الأمجاد
الأستاذ أنس نور الدين مجني	ثانوية الماوردي
الأستاذ يوسف أحمد محمود الرقب	ثانوية مجمع الأمير سلمان

تحت إشراف المشرف التربوي

الأستاذ/ عادل بن عبد العزيز البعيجان

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

كلمة المدارس

إنطلاقا من مبدأ النشر الإلكتروني، وحرصا منا على تعميم الفائدة لجميع مرتاديها بإسلوب مطور وحديث وبشكل أسرع وأيسر قامت مدارس الشمس الأهلية بتبني نشر هذه المذكرة لتحقق بذلك أحد أهدافها السامية في مسيرة التعليم في المملكة.

مع تحيات
الإدارة العامة لمدارس الشمس الأهلية

ملاحظة : للحصول على نسخة من هذا الملخص نرجو زيارة موقعنا على العنوان التالي:

http://www.shamsschool.com

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي وهبنا عقلاً نفكر به وميزنا عن سائر مخلوقاته والصلاة والسلام على معلم البشرية نبينا محمد ﷺ.

تم بحمد الله وفضله إخراج هذا الكتاب للصف الثالث الثانوي العلمي من خلال اجتماعات ورشة عمل قسم الرياضيات بعنوان (كيف نرعى الطالب المتفوق) بتاريخ 1421/12/20 هـ .

وكان هذا العمل بجهود فردية من الاخوة المعلمين للمرحلة الثانوية في مركز إشراف الروضة.

و ذلك لإشباع رغبة الطالب المتفوق وزيادة مهاراته وتعزيز قدراته، وضمن هذه الرعاية الخاصة نتمنى أن يجد الطالب كل ما يحتاجه لتنمية قدراته في مادة الرياضيات وتلبية حاجاته الفكرية والثقافية.

نشكر المدرسين الذين قاموا بجهد ليس سهلاً من تأليف وجمع وإعداد وكتابة و مراجعة لإخراج هذا الكتاب على هذه الصورة و الذين يتوخون الأجر والثواب من الله ﷻ.

تم ذلك في مركز إشراف الروضة

تمارين

الباب الأول

※ **عين فيما يلي القيم القصوى على الفترات المقابلة**

١) د(س) = ٢س (س−١)^{٢} ف= [−١ ، ٢]

الحل دَ(س) = ٢ (س−١)^{٢} + ٢(س−١) × ٢س

= ٢(س−١) (س−١ +٢س)

= ٢ (س−١) (٣س ـ١)

دَ (س) = ٠ ⟸ ٢ (س−١) (٣س−١)=٠

أما س−١ = ٠ ⟸ س = ١∋(−١، ٢)

أو ٣س − ١ = ٠ ⟸ س = $\frac{1}{3}$ ∋ (−١، ٢)

نبحث عن القيم القصوى عندما س={ −١، $\frac{1}{3}$، ١ ، ٢ }

د (−١) = ٢ × (−١) (−١−١)^{٢}

= −٢ (−٢)^{٢} = −٨

د ($\frac{1}{3}$) = ٢ × $\frac{1}{3}$ ×($\frac{1}{3}$−١)^{٢}

$= \frac{2}{3} \times (-\frac{2}{3})^{٢} = \frac{8}{27}$

د (١) = ٠ ، د (٢) = ٤ × ١ = ٤

إذاً القيمة العظمى هي ٤ تتحقق عندما س = ٢

القيمة الصغرى هي −٨ تتحقق عندما س= −١

٢) د(س) = س^{٣} ـ ٣س^{٢} + ١ ف = [−١، ٣]

الحل دَ(س) = ٣س^{٢} −٦س ، دَ(س) = ٠ ⟸ ٣س(س−٢) = ٠

أما س=٠ أو س−٢ = ٠ ⟸س =٢

إذاً القيم القصوى تتحقق ضمن المجموعة { −١ ، ٠ ، ٢ ، ٣ }

د(−١) = −١ −٣ +١ = −٣

د(٢) = ٨−١٢ + ١ = −٣

د(٣) = ٢٧ ـ ٢٧ + ١= ١

د(٠) = ١

إذاً القيمة العظمى هي ١ تتحقق عندما س∈ {٠، ٣}

القيمة الصغرى هي ـ٣ تتحقق عندما س∈ {−١، ٢}

٣) د(س) = س^{٣} −١٢س+٥ ف= [−٣، ٣]

الحل دَ(س) = ٣س^{٢} −١٢

دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٣س^{٢} ـ ١٢ =٠

$\Leftarrow$٣س^{٢} =١٢ $\Leftarrow$

س^{٢} = ٤

$\Leftarrow$ س=±٢∈(−٣، ٣)

اذاً القيم القصوى تتحقق في المجموعة {−٣، −٢، ٢، ٣}

د(−٣) = −٢٧ + ٣٦ + ٥ = ١٤

د(−٢) = −٨ +٢٤+ ٥=٢١

د(٢) = ٨−٢٤ + ٥ = −١١

د (٣) = ٢٧−٣٦ + ٥ = −٤

اذاً القيمة العظمى هي ٢١ تتحقق عندما س= −٢ ،

القيمة الصغرى هي -١١ تتحقق عندما س=٢

※ **حقق شروط نظرية رول، ثم أوجد قيمة جـ التي تعينها النظرية لكل من الدوال التالية على الفترة المقابلة:**

(١) د(س) = جتا ٢س + ٢جتا س ف= [٠، ٢ط]

الحل * د(س) دالة مثلثية دورية متصلة على ح

إذاً هي متصلة على [٠، ٢ط]

دَ(س) = −٢ جا ٢س −٢ جا س ∴ د(س) قابلة للاشتقاق على (٠، ٢ط)

د(٠) = جتا (٢×٠) + ٢ جتا (٠)

= ١ + ٢ = ٣

د(٢ط) = جتا ٤ ط + ٢ جتا ٢ط

= ١ + ٢ = ٣

إذاً تحققت شروط نظرية رول وبالتالي يوجد على الأقل جـ∋(٠، ٢ط) بحيث يكون دَ(جـ)= ٠

دَ(س) = −٢ جا ٢س −٢ جا س

دَ(س) = ٠ ⟸ −٢ جا ٢س − ٢جاس = ٠

⟸ −٢ (٢ جا س جتا س + جا س) = ٠

⟸ −٢ جا س (٢ جتا س + ١) =٠

أما جا س = ٠ ⟸ س=م ط حيث م∋ ص مجموعة الأعداد الصحيحة

م=٠ ⟸ س=٠ ∌ **(٠ ،٢ط)** لذلك تستبعد

م=١ ⟸ س= ط ∋(٠، ٢ط)

م=٢ ⟸ س=٢ط ∌ (٠، ٢ط) لذلك تستبعد

أو ٢ جتا س + ١ = ٠ ⟸ جتا س = $-\frac{1}{2}$

$\Leftarrow$ س = $\pm \frac{2ط}{3}$ + ٢ط م حيث م $\in$ ص

م = ٠ $\Leftarrow$ س = $\begin{cases} \frac{2ط}{3} \in (0، 2ط) \\ -\frac{2ط}{3} \notin (0، 2ط) \end{cases}$

م = ١ $\Leftarrow$ س = $\begin{cases} \frac{4ط}{3} \in (0، 2ط) \\ \frac{8ط}{3} \notin (0، 2ط) \end{cases}$

$\therefore$ إذاً جـ = { ط ، $\frac{2ط}{3}$ ، $\frac{4ط}{3}$ }

٢) د(س) = $\sqrt{٤س - س^٢}$ ف = [٠، ٤]

الحل: نوجد أولاً مجال تعريف الدالة ٤س − س^٢ $\geq$ ٠

٤ س − س^٢ = ٠ $\Leftarrow$ س (٤ - س) = ٠ أما س = ٠ أو ٤ - س = ٠ $\Leftarrow$ س = ٤

اشارة س − س^٢ − − − − − − ٠ + + + + + + + ٤ − − − − − −

مجال تعريف الدالة [٠ ، ٤] $\therefore$ د (س) متصلة على [٠ ، ٤]

دَ(س) = $\frac{2-س}{\sqrt{4س-س^2}}$ $\therefore$ د (س) قابلة للاشتقاق على (٠ ، ٤)

د (٠) = ٠ = د (٤) = ٠ إذا تحققت شروط نظرية رول و بالتالي يوجد على الأقل

جـ $\in$ (٠، ٤) بحيث يكون دَ(جـ) = صفراً أي :

دَ(س) = $\frac{2-س}{\sqrt{4س-س^2}}$

دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٢ − س = ٠

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

⇐ س = ٢ ∋ (٠ ، ٤)

⇐ جـ = ٢

حقق شرطي نظرية القيمة المتوسطة، ثم أوجد قيمة جـ التي تعنيها النظرية لكل من الدوال التالية على الفترة المقابلة:

١) د(س) = $\frac{س - 3}{2س + 1}$ **ف = [١ ، ٣]**

الحل د(س) متصلة على ح — [$-\frac{1}{2}$] إذاً د(س) متصلة على [١، ٣]

د(س) قابلة للاشتقاق على (١ ، ٣)

إذاً تحقق شرطا نظرية القيمة المتوسطة يوجد على الأقل جـ ∋ (١، ٣)

تحقق دَ(جـ) = $\frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$ ⇐ **دَ(س) =** $\frac{(2س + 1) - 2(س - 3)}{(2س + 1)^2}$

$$= \frac{2س + 1 - 2س + 6}{(2س + 1)^2} = \frac{7}{(2س + 1)^2}$$

$$= \frac{د(3) - د(1)}{3 - 1} = \frac{0 - \frac{-2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{7}{(2س + 1)^2} = \frac{1}{3}$$

⇐ ٤ س^{٢} + ٤س + ١ = ٢١

⇐ ٤ س^{٢} + ٤س − ٢٠ = ٠

⇐ س^{٢} + س − ٥ = ٠

٤ ≠ ٠ ⇐ س^{٢} + س − ٥ = ٠

ز = ب^{٢} − ٤أجـ = ٢١

إما $\quad$ س$_١$ = ١,٨ $\in$ (١ ، ٣) $\quad$ أو $\quad$ س$_٢$ = −٢,٨ $\notin$ (١ ، ٣)

∴ $\quad$ جـ = ١,٨

٢) د(س) = س + جا ٢س $\quad$ على $\quad$ [٠ ، $\frac{ط}{2}$]

الحل $\quad$ ١) د(س) متصلة على [٠ ، $\frac{ط}{2}$]

٢) د(س) قابلة للاشتقاق على (٠ ، $\frac{ط}{2}$)

دَ(س) = ١ + ٢ جتا ٢س

$$دَ(س) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ} = \frac{د(\frac{ط}{2}) - د(0)}{\frac{ط}{2} - 0} = \frac{\frac{ط}{2} + جا 2\frac{ط}{2}}{\frac{ط}{2} - 0}$$

$$= \frac{\frac{ط}{2}}{\frac{ط}{2}} = ١ \Leftarrow$$

١ + ٢ جتا ٢س = ١

$\Leftarrow$ جتا ٢س = ٠ $\Leftarrow$ ٢س = $\frac{ط}{2}$ + م ط

$\Leftarrow$ س = $\frac{ط}{4}$ + $\frac{ط}{2}$ م

م = ٠ $\Leftarrow$ س = $\frac{ط}{4} \in$ (٠ ، $\frac{ط}{2}$)

إذاً جـ = $\frac{ط}{4}$

※ أوجد فترات تزايد وتناقص د(س) = س^٣ − ٣س^٢ $\quad$ على مجالها

الحل $\quad$ د(س) كثيرة حدود مجالها ح

دَ(س) = ٣س^٢ − ٦س

دَ(س) = ٠ $\Leftarrow$ ٣س^٢ − ٦س = ٠

⇐ إما س=٠ أو س=٢

س	+∞		٢		٠		−∞
إشارة دَ(س)		+	٠	−	٠	+	

د(س) متزايدة متناقصة متزايدة

د متزايدة على (− ∞ ، ٠] وَ [٢، + ∞) ، د متناقصة على [٠ ، ٢]

※أوجد مواضع القيم الصغرى والعظمى المحلية للدالة

د(س) = $\frac{1}{2}$ س ـ جا س [٠، ٢ط]

الحل:دَ(س) = $\frac{1}{2}$ − جتا س ⇐ دَ(س) = ٠ ⇐ $\frac{1}{2}$ − جتا س = ٠

⇐ جتا س = $\frac{1}{2}$ ⇐ س = $\frac{ط}{3}$ أو $\frac{5ط}{3}$ دً(س) =جاس ⇐

دً ($\frac{ط}{3}$) = جا $\frac{ط}{3}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ > ٠ للدالة قيمة صغرى محلية عندما س = $\frac{ط}{3}$

دً ($\frac{5ط}{3}$) =جا $\frac{5ط}{3}$ = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ < ٠ للدالة قيمة عظمى محلية عندما س = $\frac{5ط}{3}$

※ أدرس تقعر الدالة وعين النقاط العظمى والصغرى المحلية ونقط الانقلاب.على مجالها

د(س) = س^{٣} ـ ٣س^{٢} ـ ٢٤س + ٢

الحل د(س) كثيرة حدود مجالها ح

دَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س ـ ٢٤

دَ(س) = ٠ ⇐ ٣س^{٢} ـ ٦س ـ ٢٤ = ٠

⇐ ٣ (س^{٢} ـ ٢س ـ ٨) = ٠ ، ٣ ≠ ٠

⇐ س^{٢} ـ ٢س ـ ٨ = ٠⇐

(س ـ ٤) (س + ٢) = ٠

⇐ إما س=٤ أو س=−٢ نقاط حرجة

دً(س) = ٦س−٦

دً(س) = ٠ ⇐ ٦س−٦=٠

⇐ (١، −٢٤) نقطة انقلاب

س	$+\infty$	٤	١	−٢	$-\infty$
إشارة دَ(س)	+ + ↗	٠ − − − ↘	− − − ↘	− − ٠	+ + + + + + ↗
إشارة دً(س)	+ + + + + + + التقعر نحو الأعلى		٠	− − − − − − − − − التقعر نحو الأسفل	
د(س)	متزايدة	−٧٨	−٢٤ متناقصة	٣٠	متزايدة

صغرى محلية انقلاب عظمى محلية

※عين النقط الحرجة للدوال الآتية وبين ما إذا كانت عظمى أم صغرى محلية.

(١) د(س) = ٥ −| س−٣|

الحـــــل

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + 2 & \text{س} \le 3 \\ 8 - \text{س} & \text{س} \ge 3 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \text{دَ(س)} = \begin{cases} 1 & \text{س} < 3 \\ \text{غير معرفة} & \text{س} = 3 \\ -1 & \text{س} > 3 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ دَ$(\overset{-}{3}) \ne$ دَ$(\overset{+}{3})$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

∴ توجد نقطة حرجة واحدة عند س = ٣

$د'(3^{-})$ = ١ > ٠ ، $د'(3^{+})$ = −١ < ٠

س = ٣ نقطة قيمة عظمى محلية

※ أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدالة د(س)= ٣− | س−١|على [٠ ، ٣]

الحـــــــل

$$د(س) = \begin{cases} س + 2 & 0 \le س \le 1 \\ 4 - س & 1 \le س \le 3 \end{cases}$$

$$\Leftarrow د'(س) = \begin{cases} 1 & 0 < س < 1 \\ \text{غير معرفة} & س = 1 \\ -1 & 1 < س < 3 \end{cases}$$

⇐ للدالة نقطة حرجة واحدة عند س=١

د(١) = ٣   د(٠) = ٢   د(٣) = ١

∴القيمة العظمى المطلقة = ٣   تتحقق عند س=١

القيمة الصغرى المطلقة = ١   تتحقق عند س=٣

※ عين فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = س + $\frac{1}{س}$

الحـــــــل

$د'(س) = ١ - \frac{1}{س^2} = \frac{س^2 - 1}{س^2} = \frac{(س+1)(س-1)}{س^2}$ حيث س ≠ ٠

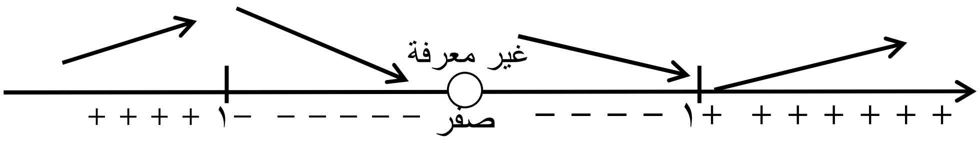
الدالة غير معرفة عند س = ٠

وكذلك لا وجود للمشتقة عند س=٠

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

دَ(س) = ٠ ⟸ س = +١ ، س = −١

اشارة دَ(س)



∴ د(س) تزايدية في]−∞ ، −١] و تناقصية في [−١ ، صفر)

و تناقصية في (صفر ، ١] و تزايدية في [١، ∞ [

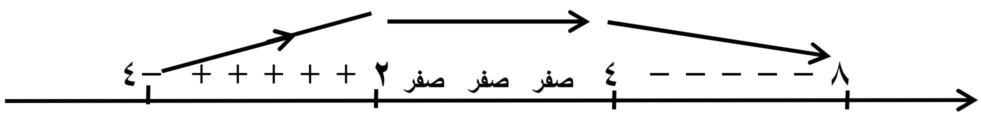
※ **عين فترات التزايد والتناقص للدالة**

د(س)= $\begin{cases} 3-(س-2)^2 & -4 \le س \le 2 \\ 4 & 2 \langle س \rangle 4 \\ 7-س & 4 \le س \le 8 \end{cases}$

الحـــــــل

دَ(س)= $\begin{cases} 4-2س & -4 \langle س \langle 2 \\ 0 & 2 \langle س \langle 4 \\ -1 & 4 \langle س \langle 8 \end{cases}$

اشارة دَ(س)



وتكون:د(س) تزايديه في [− ٤، ٢] و ثابتة في [٢ ، ٤]

و تناقصيه في [٤ ، ٨]

※ **دالة من الدرجة الثانية يمر منحناها بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (٢ ، −١٢)**

أوجد قاعدة هذه الدالة. إذا علم أن النقطة (٢، د(٢)) نقطة حرجة ثم ادرس تقعر هذه الدالة.

الحـــــل

نفرض أن د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

د(٠) = ٠ ⟸ جـ = صفر

د(٢) = −١٢ ⟸ ٤أ + ٢ب = −١٢ (١)

دَ(س) = ٢أس + ب   (٢، د(٢)) نقطة حرجة

دَ(٢) = ٠ ⇐ ٤أ + ب = ٠   (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن   أ=٣   ب=−١٢   جـ= صفر

د(س) = ٣س^{٢} ـ ١٢س

دَ(س) = ٦س ـ١٢ ⇐ دً(س) = ٦ >٠

منحى الدالة مقعر لأعلى.

※ اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي※

(١) إذا كانت د(س) = ٢س ـ س^{٢} فإن د(س) تناقصيه في

(أ) (− ∞،١]   (ب) [٠، ∞)   (جـ) (− ∞،٠]   ✓ (د) [١، ∞)

---

(٢) إذا كانت د(س) = جاس ، س [٠، ط] فإن جـ التي تعنيها نظرية رول لهذه الدالة هي:

(أ) صفر   (ب) $\frac{ط}{4}$ ✓(جـ) $\frac{ط}{2}$ (د) $\frac{3ط}{2}$

---

(٣) إذا كان للدالة د(س) = س^{٣}− م س+٣ قيمة قصوى محلية عند س=−٢فإن قيمة م هي:

(أ) ١١   (ب) ـ٢   (جـ) ٣   ✓(د) ١٢

---

(٤) إذا كانت للدالة د(س) نقطة انعطاف عند س=٢ وكانت

د(س) = ٤س^{٣} ـ م س^{٢}.   حيث م ثابت. فإن قيمة م هي:

(أ) ٦   (ب) ١٢   (جـ) ٤   ✓ (د) ٢٤

---

(٥) إذا كانت د(س) كثيرة حدود لها نقطة حرجة عند س=−٢ فإن

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

(أ) د(−٢) = صفر (ب) د(−٢) غير معرفة

✓(جـ) دَ(−٢)=صفر (د) دَ(−٢) غير معرفة

---

(٦) القيمة الصغرى للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{س^٢}$ + ٥ على [−١ ،٨] هي:

(أ) ٦ (ب) ٩ ✓(جـ) ٥ (د) ٤

※أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. إذا كان |أ ب| +|ب جـ| = ٢٠سم

أثبت أن أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث تكون عندما ق (أ̂) = ٤٥ْ

الحـــــل

نفرض أن |أ ب| = س ، |ب جـ|= ص

س + ص = ٢٠ ⇐ $\boxed{\text{ص = ٢٠ − س}}$

م = $\frac{1}{2}$ س × ص

م = $\frac{1}{2}$ س (٢٠ − س)

د(س) = ١٠س − $\frac{1}{2}$ س^٢ حيث س ∋ [٠ ، ٢٠]

دَ(س) = ١٠ − س

دَ(س) = ٠ ⇐ ١٠ − س = ٠⇐ $\boxed{\text{س = ١٠}}$

د(٠) = صفر

د(١٠) = ٥٠

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

د(٢٠) = صفر

أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث = ٥٠ عند س = ١٠

ص = ١٠

أي أن المثلث متطابق الساقين ق ($\hat{أ}$) = ٤٥°

※ أوجد القيمة العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للدالة د(س) = $\sqrt[٣]{(س^٣ - ١٢س)^٢}$ ، [٠، ٣]

الحـــــل

د(س) = $(س^٣ - ١٢س)^{\frac{2}{3}}$

دَ(س) = $\frac{2}{3}$ $(س^٣ - ١٢س)^{-\frac{1}{3}}$ × (٣ س^٢ - ١٢)

دَ(س) = $\frac{2(س^2-4)}{\sqrt[3]{س^3-12س}}$

دَ(س) = $\frac{2(س+2)(س-2)}{\sqrt[3]{س^3-12س}}$

وبالتالي النقاط الحرجة تحقق عندما

دَ(س)=٠ ⇐ س=-٢ أو س=٢

دَ(س) غير معرفة ⇐ س^٣ -١٢س=٠

⇐ س=٠ أو س= ٢$\sqrt{٣}$ ، -٢$\sqrt{٣}$

وتكون النقاط الحرجة هي: س=٢

القيم القصوى تتحقق عند المجموعة { ٠ ، ٢ ، ٣}

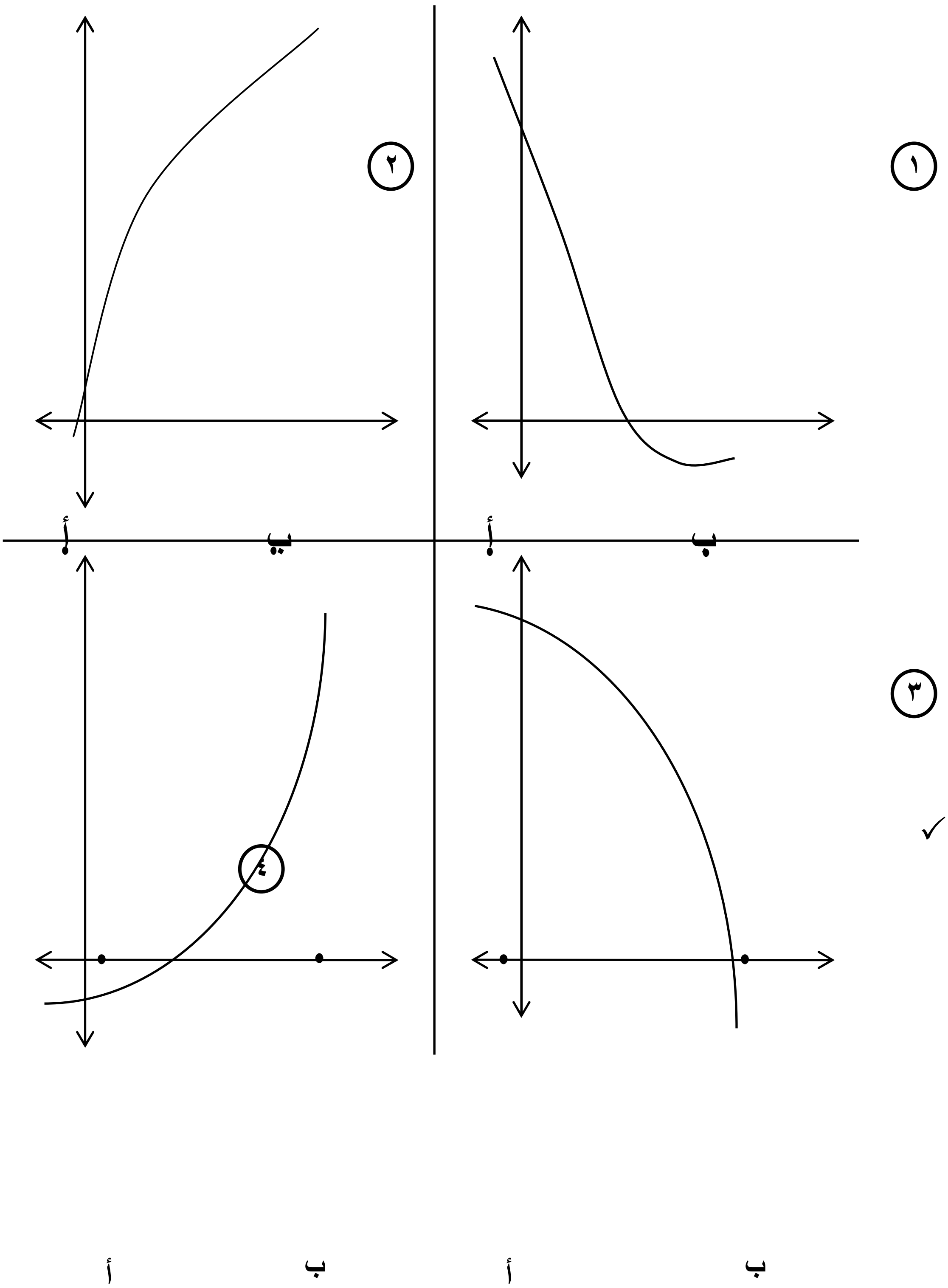
د(٢) = ٤ $\sqrt[3]{٤}$ د(٠) = ٠ د(٣) = ٣ $\sqrt[3]{٣}$

العظمى = ٤ $\sqrt[3]{٤}$

الصغرى = صفر

※ **إذا كانت دً(س) <٠ ، دَ(س) <٠   لكل س ∋ (أ ، ب)**

فبين أياً من المنحنيات الآتية تمثل منحنى الدالة د في [أ ، ب] مع توضيح السبب



الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

(١) دً(س) < ٠ منحنى د(س) مقعر لأسفل في [أ ، ب]

وهذا ينطبق على (٢) ، (٣)

(٢) دَ(س) < ٠ الدالة تناقصية في [أ ، ب] وبذلك نستبعد الشكل (٢)

(٣) المنحنى المطلوب هو شكل (٣)

※إذا كانت للدالة د(س) = س^{٣} +أس^{٢} + ب س نقطة انقلاب عند النقطة (٢ ، ٢)

أولاً:- عين قيمتي الثابتين أ ، ب

ثانياً:- ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة

الحـــــل

دَ(س) = ٣س^{٢} +٢أس + ب

دً(س) = ٦س +٢أ

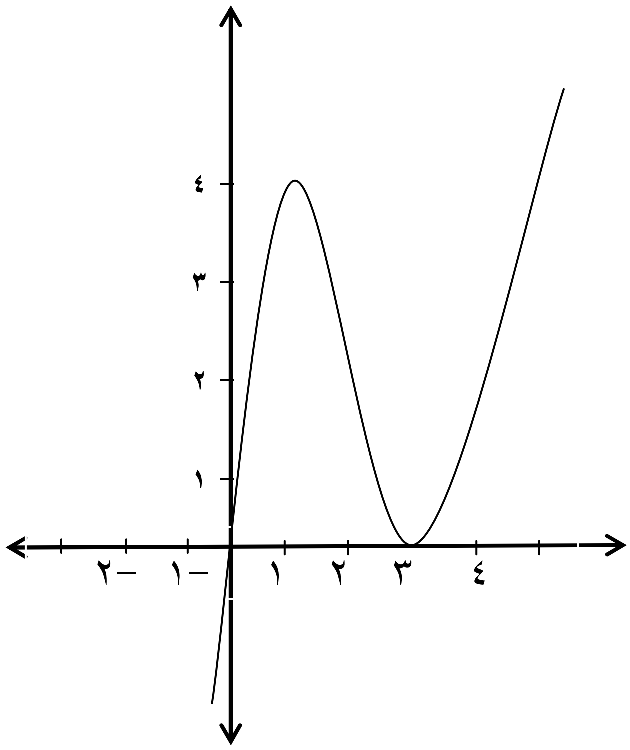
(٢،٢) انقلاب ⇐ دً(٢) = ٠

١٢ +٢أ=٠ ⇐ أ = -٦

(٢،٢) نقطة على المنحنى ⇐ د(٢)=٢ ⇐ ٢ = ٨-٢٤ + ٢ب ⇐ ب =٩

∴ د(س) = س^{٣} -٦س^{٢} + ٩س

د(س) = س (س - ٣)^{٢} ولرسم منحنى الدالة نوجد النقاط الحرجة



دَ(س)=٠ ⇐ ٣س^{٢}- ١٢س + ٩=٠

س^{٢}-٤س+٣=٠

(س-٣) (س-١)=٠

إما س = ١ ، أو س = ٣

دً(س)=٦س-١٢

دً(١)= -٦ <٠ ⇐ د(١)=٤ عظمى محلية

دً(٣)= ٦>٠ ⇐ د(٣)=٠ صغرى محلية

نقاط مساعدة

د(٤) = ٤ ، د(٠)=٠ ، د(-١)=-١٦

※ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = (\text{س}-\text{س}_{١})^{٢} + (\text{س}-\text{س}_{٢})^{٢} + \dots\dots + (\text{س}-\text{س}_{\text{ن}})^{٢}$

فأثبت أن د تأخذ قيمة صغرى عندما $\text{س} = \frac{1}{\text{ن}}(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}+\text{س}_{٣}+\dots\dots+\text{س}_{\text{ن}})$

الحـــــل

$\text{د}'(\text{س}) = ٢(\text{س}-\text{س}_{١}) + ٢(\text{س}-\text{س}_{٢}) + \dots\dots + ٢(\text{س}-\text{س}_{\text{ن}})$

$\text{د}'(\text{س}) = ٢\ [\ \text{ن س} - (\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}+\dots\dots+\text{س}_{\text{ن}})\ ]$

$\text{د}'(\text{س}) = ٠$ عندما $\text{ن س} = \text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \dots\dots + \text{س}_{\text{ن}}$

أي $\text{س} = \frac{1}{\text{ن}}(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}+\dots\dots+\text{س}_{\text{ن}})$

$\text{د}''(\text{س}) = ٢ + ٢ + \dots\dots + ٢ = ٢\text{ن} > ٠$

$\text{س} = \frac{1}{\text{ن}}(\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}+\dots\dots+\text{س}_{\text{ن}})$ نقطة قيمة صغرى للدالة

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية وعين مجالها (مجال المشتقة)

(١) $\text{د}(\text{س}) = (٣\text{س}+٢)^{٢} - (٢\text{س}^{٢}-١)^{٣}$

(٢) $\text{ر}(\text{س}) = \frac{5\text{س}^2-1}{5\text{س}^2+1}$

الحل :

(١) $\text{د}'(\text{س}) = ٢(٣\text{س}+٢)\times٣ - ٣(٢\text{س}^{٢}-١)^{٢}\times٤\text{س} = -٤٨\text{س}^{٥}+٤٨\text{س}^{٣}+٦\text{س}+١٢$ مجالها ح(كثيرة حدود)

(٢) $\text{ر}'(\text{س}) = \frac{10\text{س}\times(5\text{س}^2+1) - 10\text{س}\times(5\text{س}^2-1)}{(5\text{س}^2+1)^2} = \frac{20\text{س}}{(5\text{س}^2+1)^2}$ مجالها ح لأن المقام $\neq$ الصفر

※ **سلك طوله ٣٠سم قسم إلى جزئين طول أحدهما س ثنى هذا الجزء على شكل دائرة وثنى الجزء الثاني على شكل مربع أوجد قيمة س ليكون مجموع مساحتي سطح الدائرة والمربع أصغر ما يمكن.**

محيط الدائرة = ٢ط نق

س = ٢ط نق $\Leftarrow$ **نق** $= \frac{س}{2ط}$

مساحة الدائرة = ط نق٢ = ط × $\left(\frac{س}{2ط}\right)^2 = \frac{س^2}{4ط}$

٣٠ ـ س = ٤ل محيط المربع

ل $= \frac{30 - س}{4}$

مساحة المربع = ل٢ = $\left(\frac{30 - س}{4}\right)^2$

مجموع المساحتين ص = $\left(\frac{30 - س}{4}\right)^2 + \frac{س^2}{4ط}$ **س** $\in$ **[٠ ، ٣٠]**

صَ = ٢× $\left(\frac{30 - س}{4}\right) \times \frac{-1}{4} + \frac{س}{2ط}$

صَ = $\frac{ط + 4}{8ط}س - \frac{15}{4}$

صً= $\frac{ط + 4}{8ط}$ **> ٠ إذاً موجب دائماً**

صَ=٠ $\Leftarrow$ س$= \frac{15}{4} \div \frac{ط + 4}{8ط} = \frac{30ط}{ط + 4}$

صً > ٠ $\Leftarrow$ المساحة أصغر ما يمكن عند س$= \frac{30ط}{ط + 4}$

تعطي أصغر قيمة لمجموع المساحتين

※مصباح معلق رأسياً فوق مركز سطح منضدة أفقي مستدير طول نصف قطره نق سم. فإذا كانت شدة الاستضاءة (ش) عند أي نقطة من حافة سطح المنضدة تتعين من العلاقة

ش = $\frac{\text{أ س}}{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^{\frac{3}{2}}}$ **حيث أ عدد ثابت موجب ، س ارتفاع مصباح عن سطح المنضدة بالسنتيمترات فأوجد الارتفاع س حتى تكون شدة الإضاءة عند حافة المنضدة أكبر ما يمكن.**

$$\frac{\text{ءش}}{\text{ءس}} = \frac{\text{أ} \times (\text{س}^2 + \text{نق}^2)^{\frac{3}{2}} - \text{أ س} \times \frac{3}{2} \times (\text{س}^2 + \text{نق}^2)^{\frac{1}{2}} \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^3} \quad \text{س} \in (٠ ، \infty)$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^{\frac{1}{2}} [\text{أ} \times (\text{س}^2 + \text{نق}^2) - 3\text{أ س}^2]}{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^3}$$

$$= \frac{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^{\frac{1}{2}} [\text{أ نق}^2 - 2\text{أ س}^2]}{(\text{س}^2 + \text{نق}^2)^3}$$

$$\frac{\text{ءش}}{\text{ءس}} = ٠ \Leftarrow (\text{س}^٢ + \text{نق}^٢)^{\frac{1}{2}} (\text{أنق}^٢ - ٢\text{أ س}^٢) = ٠$$

$(\text{أنق}^٢ - ٢\text{أ س}^٢) = ٠ \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{نق}}{\sqrt{2}} \in (٠ ، \infty)$ و هي نقطة حرجة وحيدة لأن

$\text{س} = -\frac{\text{نق}}{\sqrt{2}} \notin (٠ ، \infty)$

إشارة $\frac{\text{ءش}}{\text{ءس}}$

$$+ + + + + + \quad \frac{\text{نق}}{\sqrt{2}} \quad - - - - - - - -$$

د$\left(\frac{\text{نق}}{\sqrt{2}}\right)$ قيمة عظمى محلية وحيدة إذاً هي قيمة عظمى مطلقة

.: **عندما س=** $\frac{\text{نق}}{\sqrt{2}}$ تكون الإضاءة أكبر ما يمكن

تمارين

الباب الثاني

أوجد التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{2\text{س}^3+16}{5\text{س}+10}\,\text{ء س}$

٢) $\int \text{س}^{٢} \times \sqrt{\text{س}+١}\quad \text{ء س}$

٣) $\int \frac{(1+\sqrt{\text{س}}\,)^7}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

٤) $\int \frac{(\text{س}-5)^2}{\sqrt{\text{س}}}\quad \text{ء س}$

٥) $\int \frac{(2\text{س}-1)(\text{س}+3)}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س}$

٦) $\int \frac{\text{س}^2-2\text{س}-15}{3\text{س}+9}\quad \text{ء س}$

٧) $\int (٢\text{س}+٥)\sqrt{\text{س}+٣}\quad \text{ء س}$

٨) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{3\text{س}^2+2}}\,\text{ء س}$

٩) $\int \frac{7}{\sqrt[5]{(2\text{س}+1)^3}}\quad \text{ء س}$

١٠) $\int \sqrt[1]{(\text{س}^4+5\text{س}^2)}\quad \text{ء س}$

١١) $\int \frac{\text{س}^3+\text{س}^2-2}{\text{س}-1}\quad \text{ء س}$

١٢) $\int \text{س}^3+\frac{2}{\text{س}^2}\quad \text{ء س}$

١٣) $\int (\text{س}-١)(١-\text{س})^{٥}\quad \text{ء س}$

١٤) $\int \sqrt{٢-٣\text{س}}\quad \text{ء س}$

١٥) $\int (\text{س}-١)(٢-\text{س})^{٥}\quad \text{ء س}$

١٦) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{\text{س}}}}{\sqrt{\text{س}}}\quad \text{ء س}$

١٧) $\int \sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}-٣)^{٤}\,\text{ء س}$

١٨) $\int \text{جتا}\,(٣\text{س}+٧)\,\text{ء س}$

١٩) $\int \frac{5}{\text{جتا}^2(3\text{س}+1)}\quad \text{ء س}$

٢٠) $\int \text{س}\ \text{جا}\,(\text{س}٢+١)\quad \text{ء س}$

٢١) $\int \frac{\text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\quad \text{ء س}$

٢٢) $\int \text{جا}^{٢}(٤\text{س}+٧)\quad \text{ء س}$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٢٣) $\int$ جا^٣ ٥س ء س

٢٤) $\int$ جا^٤ س ء س

٢٥) $\int$ قا^٤ س ظاس ء س

٢٦) $\int$ س جا^٣ س^٢ جتا س^٢ ء س

٢٧) $\int \frac{1}{1-\text{جتاس}}$ ء س

٢٨) $\int \frac{(5+\text{ظاس})^3}{\text{جتا}^2\text{س}}$ ء س

٢٩) $\int \frac{\text{جا}^2\text{س}-\text{جاس}-2}{2-\text{جاس}}$ ء س

٣٠) $\int \frac{25-\text{س}^2}{-\,2\text{س}-10}$ ء س

٣١) $\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}+3}}{2-2\,\text{جتا}^2\text{س}}$ ء س

٣٢) $\int \frac{\sqrt{\text{جا}^2\text{س}+4}}{\text{قاس}}$ جاس ء س

٣٣) $\int$ جتا(جاس) جتاس ء س

٣٤) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}\ \sqrt{\text{قاس}+3}}$ ء س

٣٥) $\int$ جا^٣ س جتا^٢ س ء س

٣٦) $\int$ ظا^٣ س قا^٣ س ء س

٣٧) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^5\text{س}}$ ء س

٣٨) $\int$ جا^٢ س جتا^٢ س ء س

٣٩) $\int \frac{\text{جتاس جاس}}{\text{ظاس}+\text{قاس}}$ ء س

٤٠) $\int \frac{\text{قا}^4\text{س}}{\text{قتاس}}$ ء س

٤١) $\int \frac{\text{جا}^7\text{س}}{\text{جتا}^9\text{س}}$ ء س

٤٢) $\int$ (ظاس − ٣)^٤ قا^٤ س ء س

٤٣) $\int \frac{2-\text{جاس}}{(2\text{س}+\text{جتاس})^3}$ ء س

٤٤) $\int$ ظا^٢ ٣س ء س

٤٥) $\int$ جتا^٢ س جا٢س ء س

٤٦) $\int$ جاس جتا٢س ء س

٤٧) $\int$ قا^{٤} س ء س

٤٨) $\int \frac{\text{قا}^{3}\text{س}}{\text{قتاس}}$ ء س

٤٩) $\int \frac{1}{1+\text{جتاس}}$ ء س

٥٠) $\int$ قتا^{٢} س (١+ ظتاس) ء س

٥١) $\int \frac{\text{جا}^{3}\text{س}}{\text{جتا}^{5}\text{س}}$ ء س

٥٢) $\int$ (جتا^{٢}س − جا^{٢}س) ء س

٥٣) $\int$ (جاس+ جتاس)^{٢} ء س

٥٤) $\int \frac{1}{1+\text{جاس}}$ **ء س**

٥٥) $\int \frac{1}{1-\text{جاس}}$ ء س

٥٦) $\int \frac{\text{س}^{3}-4}{\text{س}\sqrt{\text{س}}-2}$ ء س

٥٧) $\int \frac{\text{س}-8}{\sqrt[3]{\text{س}^{2}}+2\sqrt[3]{\text{س}}+4}$ ء س

٥٨) $\int \frac{\text{جا}^{3}\text{س}}{\text{جتا}^{10}\text{س}}$ ء س

٥٩) $\int \frac{\text{قا}^{2}(\sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}}$ ء س

٦٠) $\int$ قا^{٤} س ظا^{٣} س ء س

٦١) $\int$ قا^{٧} س ظاس ء س

٦٢) $\int$ (٣− س^{٣})^{٢} س ء س

٦٣) $\int$ س^{٢} جا (س^{٣}) ء س

٦٤) $\int$ جا^{٥} س ء س

٦٥) $\int$ جتا^{٥} س ء س

٦٦) $\int$ (جتا^{٤} س− جا^{٤}س) ء س

٦٧) $\int$ ظا^{٤} س ء س

٦٨) $\int$ [جا^{٢} $(\frac{\text{س}}{2})$+ ٣]^{٣} .جاس ء س

٦٩) $\int \frac{\text{جا}2\text{س}}{\text{قتا}2\text{س}}$ ء س

٧٠) $\int (\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤)^{٤} \; \text{ء س}$

٧١) $\int \frac{\text{س جا س}^{2}}{\text{جتا}^{2}\text{س}^{2}} \; \text{ء س}$

٧٢) $\int \frac{\text{جتا}2\text{س}}{\text{جا}^{2}\text{س} \; \text{جتا}^{2}\text{س}} \; \text{ء س}$

٧٣) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٣}} \; \text{ء س}$

٧٤) $\int \frac{(\text{س}+1)^{5}}{\text{س}^{7}} \; \text{ء س}$

٧٥) $\int \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{\text{س}+1}} \; \text{ء س}$

٧٦) $\int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}} \; \text{ء س}$

٧٧) $\int \text{جتا}^{٣}\text{س جا}^{٥}\text{س} \; \text{ء س}$

٧٨) $\int \frac{(1+\sqrt{\text{س}+1}\,)^{5}}{\sqrt{\text{س}+1}} \; \text{ء س}$

٧٩) $\int \frac{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \; \text{ء س}$

٨٠) $\int_{٠}^{١} \text{س}^{٣} \times \sqrt{\text{س}^{٢}+٣} \; \text{ء س}$

٨١) $\int \text{س جتا س} \; \text{ء س}$

٨٢) $\int_{١}^{8} \frac{(1+\text{س}^{\frac{2}{3}})^{3}}{\text{س}^{\frac{1}{3}}} \; \text{ء س}$

أوجد قيمة التكامل إن أمكن :

٨٣) $\int_{١}^{2} \sqrt{١ - \text{س}} \; \text{ء س}$

٨٤) $\int_{١}^{2} \frac{\text{س}^{3} - \text{س}}{\text{س} - 1} \; \text{ء س}$

٨٥) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^{2} + 4\text{س} + 4} \; \text{ء س}$

٨٦) $\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}} \; \text{ء س}$

٨٧) $\int_{٠}^{٦} (\,٥\text{س} + |\text{س} - ٢|\,) \; \text{ء س}$

٨٨) إذا كان $\int_{2}^{٣} \text{د(س)} \; \text{ء س} = ٣$ أوجد $\int_{٣}^{2} (٢\text{س} + ٣ \times \text{د(س)}\,) \text{ء س}$

٨٩) إذا كان د(س) $\geq$ ٥ لكل س $\in$ [١ ، ٣] أوجد أكبر قيمه للدالة

$\int_{١}^{٣}$ (٢ د(س)+١) ء س

٩٠) إذا كان $\int_{أ}^{ب}$ س د(٢س+١) ء س =٥

أوجد قيمة $\int_{أ-٢}^{ب-٢}$ (٢س+٤) د(٢س+٥) ء س

٩١) إذا كان $\int_{١}^{أ}$ ٢س ء س =١٥ أوجد قيمة أ

٩٢) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ $د_{١}$(س) ء س =٥

وكان $\int_{١}^{٣}$ (٣ $د_{١}$(س) − ٤ $د_{٢}$(س)) ء س =−١

أوجد $\int_{٣}^{١}$ $د_{٢}$(س) ء س

٩٣) إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = ٢س+١ عند كل نقطة (س ، ص) من منحنى ما أوجد معادلة المنحنى الذي يمر في (٢،٢) ويمس المستقيم ص=٢س+١ عند(٢،٢)

٩٤) أوجد الدالة الأصلية للدالة د(س)= $\frac{1-جاس}{س + جتاس}$

٩٥) اثبت أن الدالة ل(س)= $ظا^{٢}$ ٣س+ ت

دالة أصلية للدالة د(س)= $\frac{6جا3س}{جتا^{3}3س}$ في الفترة [٠ ، $\frac{ط}{12}$]

٩٦) أوجد مجموع ريمان للدالة د(س)=٢$س^{٢}$− ١ حيث س ∋[٠، ٢]مستخدماً التجزيء التالي

$ت_{ن}$(٠، ٢) = (٠، ١ ، ٢) والنقط $جـ_{١}$= $\frac{1}{2}$ $جـ_{٢}$=١ ، $جـ_{٣}$= $\frac{3}{2}$

٩٧) أوجد $\int_{٠}^{٣}$ د(س) ء س حيث د(س)= $\begin{cases} س^{3}+3 & س \le 1 \\ -س^{2}+5 & س > 1 \end{cases}$

٩٨) ابحث قابلية الدالة للتكامل

ص= ٢$س^{٢}$ ظا٣س على [٠ ، ط]

٩٩) إذا كانت الدالة د متصلة على [٢، ٦] فأوجد

$\int_{٢}^{٣}$ د(س) ء س + $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س + $\int_{٥}^{٢}$ د(س) ء س

١٠٠) أوجد قيمة س التي تحققها نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$\int_{-٢}^{١}$ (٣$س^{٢}$− ١) ء س

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

١٠١) إذا كان $\int_{٢}^{٦}$ د(س)ء س=١٦ وكان $\int_{٣}^{٢}$ د(س)ء س=−٤، $\int_{٥}^{٦}$ د(س)ء س =٥

أوجد $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س ، $\int_{٢}^{٣}$ ٥×د(س) ء س ، $\int_{٦}^{٦}$ د(س) ء س

١٠٢) إذا كان د(س)= س ، ر(س)= $\frac{5}{س^2}$ أثبت أن $\int_{٣}^{٦}$ د(س) ء س > $\int_{٣}^{٦}$ ر(س)ء س

١٠٣) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ت= جتا٢ن حيث ن هي الزمن بالثواني أوجد بدلالة الزمن كلاً من سرعة الجسيم والمسافة المقطوعة علماً بأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل بسرعة مقدارها ٤م/ث

١٠٤) وجد معادلة المنحنى ص= د(س)، إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$= $\sqrt[٣]{س}$ −٥ وميل المنحنى عند النقطة (١، −٨) هو ٢

١٠٥) ارسم منحنى الدالة د(س) إذا كانت دَ(س) = ٣س^{٢} −٣ والمنحنى يمر بالنقطة(٠، ٢) مبيناً النقط الحرجة ونقط الانقلاب إن وجدت ٠

الحـــــــــــــــــــــــــــلـــــــــــــــــــــــــــول

١) $\int \frac{2س^3+16}{5س+10}$ ء س

الحل

$\int \frac{2(س^3+8)}{5(س+2)}$ ء س

$= \frac{2}{5} \int \frac{(س+2)(س^2-2س+4)}{(س+2)}$ ء س

$= \frac{2}{5} \int$ (س^{٢}−٢س+٤) ء س

$= \frac{2}{5} \left(\frac{1}{3}\right.$ س^{٣}− س^{٢}+٤س)+ث

٢) $\int$ س^{٢} $\sqrt{س+١}$ ء س

الحل

نفرض أن س+١= ص (١)

س= ص− ١ (٢)

ء س=ء ص (٣)

$= \int$ (ص−١)^{٢} $\sqrt{ص}$ ء ص

$= \int$ (ص^{٢}−٢ص+١) $\sqrt{ص}$ ء ص

$= \int$ (ص$^{\frac{5}{2}}$ −٢ص$^{\frac{3}{2}}$+ص$^{\frac{1}{2}}$) ءص

$= \frac{2}{7}$ ص$^{\frac{7}{2}}$ − $\frac{4}{5}$ ص$^{\frac{5}{2}}$ + $\frac{2}{3}$ ص$^{\frac{3}{2}}$ + ث

$= \frac{2}{7}$ (س+١)$^{\frac{7}{2}}$ − $\frac{4}{5}$ (س+١)$^{\frac{5}{2}}$ + $\frac{2}{3}$ (س+١)$^{\frac{3}{2}}$ + ث

٣) $\int \frac{(1+\sqrt{س})^7}{\sqrt{س}}$ ء س

$=2\times\int \frac{1}{2\times\sqrt{س}}$ (١ + $\sqrt{س}$)^{٧} ء س

$=$ ٢× $\frac{(1+\sqrt{س})^8}{8}$ + ث

$= \frac{1}{4}$(١+$\sqrt{س}$)^{٨}+ ث

٤) $\int \frac{(س-5)^2}{\sqrt{س}}$ ء س

$= \int \frac{س^2-10س+25}{\sqrt{س}}$ ء س $= \int$ (س$^{\frac{3}{2}}$ − ١٠س$^{\frac{1}{2}}$+٢٥س$^{\frac{-1}{2}}$) ء س

$= \frac{2}{5}$ س$^{\frac{5}{2}}$ − $\frac{20}{3}$ س$^{\frac{3}{2}}$ + ٥٠ س$^{\frac{1}{2}}$+ث

٥) $\int \frac{(2س-1)(س+3)}{\sqrt{س}}$ ء س $= \int \frac{2س^2+5س-3}{\sqrt{س}}$ ءس

ثم يكمل الحل مثل التمرين السابق

٦) $\int \frac{س^2-2س-15}{3س+9}$ ءس $= \int \frac{(س-5)(س+3)}{3(س+3)}$ ء س

$= \frac{1}{3}\int$ (س− ٥) ء س

$= \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{2}$ س^{٢}− ٥ س)+ ث

٧) $\int \sqrt{(٢س+٥)}$ س+٣ ء س

بالتعويض

س+٣= ص ——————١

$\text{س} = \text{ص} - ٣$ ---------- ٢

$\text{ء س} = \text{ء ص}$ ---------- ٣

$$= \int [٢(\text{ص} - ٣) + ٥] \sqrt{\text{ص}} \; \text{ء ص}$$

$$= \int (٢\text{ص} - ٦ + ٥) \sqrt{\text{ص}} \; \text{ء ص}$$

$$= \int (٢\text{ص} - ١) \sqrt{\text{ص}} \; \text{ء ص}$$

$$= \int (٢\text{ص}^{\frac{3}{2}} - \text{ص}^{\frac{1}{2}}) \; \text{ء ص}$$

$$= \frac{4}{5}\text{ص}^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{4}{5}(\text{س}+٣)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(\text{س}+٣)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

٨) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{3\text{س}^2+2}} \; \text{ء س}$

$$= \int \text{س} \, (٣\text{س}^٢+٢)^{-\frac{1}{2}} \; \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{6} \int ٦\text{س} \, (٣\text{س}^٢+٢)^{-\frac{1}{2}} \; \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{6} \; \frac{(3\text{س}^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{٣\text{س}^٢+٢} + \text{ث}$$

٩) $\int \frac{7}{\sqrt[5]{(2\text{س}+1)^3}} \; \text{ء س}$

$$= \int ٧ \, (٢\text{س}+١)^{-\frac{3}{5}} \; \text{ء س}$$

$$= \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} (٢\text{س}+١)^{\frac{2}{5}} + \text{ث}$$

$$= \frac{35}{4} (٢\text{س}+١)^{\frac{2}{5}} + \text{ث}$$

١٠) $\int_0^1 \sqrt{\text{س}^٤+٥\text{س}^٢} \; \text{ء س}$

$$= \int_0^1 \text{س} \sqrt{\text{س}^٢+٥} \; \text{ء س} = \frac{1}{2} \int_0^1 ٢\text{س} \, (\text{س}^٢+٥)^{\frac{1}{2}} \; \text{ء س}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (\text{س}^٢+٥)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = ١,١٧$$

١١) $\int \frac{\text{س}^3+\text{س}^2-2}{\text{س}-1} \; \text{ء س}$

بالقسمة المطولة

$$= \int (\text{س}^٢+٢\text{س}+٢) \; \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{3}\text{س}^٣ + \text{س}^٢ + ٢\text{س} + \text{ث}$$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

١٢) $\int \left(س^{3} + \frac{2}{س^{2}} \right) ء س$

$= \int (س^{٣} + ٢س^{-٢})\, ء س$

$= \frac{1}{4} س^{٤} - ٢س^{-١} + ث$

$= \frac{1}{4} س^{٤} - \frac{2}{س} + ث$

١٣) $\int (س - ١)(١ - س)^{٥}\, ء س$

$= - \int (١ - س)^{٦}\, ء س$

$= - \frac{1}{-7} (١ - س)^{٧} + ث$

$= \frac{1}{7} \times (١ - س)^{٧} + ث$

١٤) $\int \sqrt{(٢ - ٣س)}\, ء س$

$= \int (٢ - ٣س)^{\frac{1}{2}}\, ء س$

$= \frac{1}{-3} \times \frac{2}{3} (٢ - ٣س)^{\frac{3}{2}} + ث$

$= \frac{-2}{9} (٢ - ٣س)^{\frac{3}{2}} + ث$

١٥) $\int (س - ١)(٢ - س)^{٥}\, ء س$

بالتعويض

$٢ - س = ص$ ---------- ١

$س = ٢ - ص$ ---------- ٢

$ء س = - ء ص$ ---------- ٣

$= - \int (٢ - ص - ١) \times ص^{٥}\, ء ص$

$= - \int (١ - ص) \times ص^{٥}\, ء ص$

$= - \int (ص^{٥} - ص^{٦})\, ء ص$

$= - \left(\frac{1}{6} ص^{٦} - \frac{1}{7} ص^{٧} \right) + ث$

$= - \frac{1}{6} (٢ - س)^{٦} + \frac{1}{7} (٢ - س)^{٧} + ث$

١٦) $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{س}}}{\sqrt{س}}\, ء س$

$= \int \frac{1}{\sqrt{س}} (١ + \sqrt{س})^{\frac{1}{2}}\, ء س$

$= ٢ \times \int \frac{1}{2 \times \sqrt{س}} \times (١ + \sqrt{س})^{\frac{1}{2}}\, ء س$

$= ٢ \times \frac{2}{3} (١ + \sqrt{س})^{\frac{3}{2}} + ث = \frac{4}{3} (١ + \sqrt{س})^{\frac{3}{2}} + ث$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

١٧) $\int \sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}} - ٣)^{٤}\ \text{ء س}$

$= \int \sqrt{\text{س}}\,(\text{س}^{٢} - ١٢\text{س}^{\frac{3}{2}} + ٥٤\text{س} - ١٠٨\sqrt{\text{س}} + ٨١)\ \text{ء س}$

$= \int (\text{س}^{\frac{5}{2}} - ١٢\text{س}^{٢} + ٥٤\,\text{س}^{\frac{3}{2}} - ١٠٨\text{س} + ٨١\,\text{س}^{\frac{1}{2}})\ \text{ء س}$

$= \frac{2}{7}\,\text{س}^{\frac{7}{2}} - ٤\,\text{س}^{٣} + \frac{108}{5}\,\text{س}^{\frac{5}{2}} - ٥٤\text{س}^{٢} + ٥٤\,\text{س}^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$

وهنالك حل آخر بالتعويض

١٨) $\int \text{جتا}(٣\text{س}+٧)\ \text{ء س}$

$= \frac{1}{3}\ \text{جا}\,(٣\ \text{س}+٧) + \text{ث}$

١٩) $\int \frac{5}{\text{جتا}^{2}(3\text{س}+1)}\ \text{ء س} = \int ٥\times\text{قا}^{٢}(٣\text{س}+١)\ \text{ء س}$

$= \frac{5}{3}\ \text{ظا}(٣\text{س}+١) + \text{ث}$

٢٠) $\int \text{س}\ \text{جا}(\text{س}^{٢}+١)\ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int ٢\text{س}\ \text{جا}(\text{س}^{٢}+١)\ \text{ء س}$

$= -\frac{1}{2}\ \text{جتا}(\text{س}^{٢}+١) + \text{ث}$

٢١) $\int \frac{\text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{ء س} = ٢\times\int \frac{1}{2\sqrt{\text{س}}}\ \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ء س}$

$= ٢\text{قا}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$

٢٢) $\int \text{جا}^{٢}(٤\text{س}+٧)\ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\int [١ - \text{جتا}٢(٤\text{س}+٧)]\ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\times\int [١ - \text{جتا}(٨\ \text{س}+١٤)]\ \text{ء س}$

$= \frac{1}{2}\ [\text{س} - \frac{1}{8}\ \text{جا}(٨\ \text{س}+١٤)] + \text{ث}$

٢٣) $\int \text{جا}^{٣}٥\text{س}\ \text{ء س}$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

= $\int$ جا^{٢} ٥ س جا٥ س ء س

= $\int$ (١ − جتا^{٢} ٥ س) جا٥ س ء س

= $\int$ (جا٥ س − جتا^{٢} ٥س جا٥ س) ء س

= − $\frac{1}{5}$ جتا٥ س + $\frac{1}{5}$ $\int$ جتا^{٢} ٥ س(−٥ جا٥ س) ء س

= − $\frac{1}{5}$ جتا٥ س + $\frac{1}{5}$ × $\frac{1}{3}$ جتا^{٣} ٥ س + ث

= − $\frac{1}{5}$ جتا٥ س + $\frac{1}{15}$ جتا^{٣} ٥ س + ث

٢٤) $\int$ جا^{٤} س ء س

= $\int$ (جا^{٢} س)^{٢} ء س

= $\int$ [$\frac{1}{2}$ (١ − جتا٢س)]^{٢} ء س

= $\frac{1}{4}$ $\int$ (١ − ٢جتا٢س + جتا^{٢} ٢س) ء س

= $\frac{1}{4}$ [س − جا٢س + $\int$ جتا^{٢} ٢س ء س]

= $\frac{1}{4}$ [س − جا٢س + $\int$ $\frac{1}{2}$ (١+ جتا٤س) ء س]

= $\frac{1}{4}$ س − $\frac{1}{4}$ جا٢س + $\frac{1}{8}$ س + $\frac{1}{32}$ جا٤س + ث

= $\frac{3}{8}$ س − $\frac{1}{4}$ جا٢س + $\frac{1}{32}$ جا٤س + ث

٢٥) $\int$ قا^{٤} س ظاس ء س = $\int$ قا^{٣} س (قاس ظاس) ء س

= $\frac{1}{4}$ قا^{٤} س + ث

٢٦) $\int$ س جا^{٣} س^{٢} جتاس^{٢} ء س

= $\frac{1}{2}$ $\int$ (جا س^{٢})^{٣} (٢س جتاس^{٢}) ء س

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$ جا^{٤} س^{٢} + ث = $\frac{1}{8}$ جا^{٤} س^{٢} + ث

٢٧) $\int$ $\frac{1}{1-\text{جتاس}}$ ء س = $\int$ $\frac{1}{1-\text{جتاس}}$ × $\frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$ ء س

= $\int$ $\frac{1+\text{جتاس}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}$ ء س

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

$$= \int \frac{1+\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \left(\frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + (\text{جاس})^{-2}\ \text{جتاس} \right) \text{ء س}$$

$$= \int [\text{قتا}^2\text{س} + (\text{جاس})^{-2}\ \text{جتاس}]\ \text{ء س}$$

$$= -\ \text{ظتاس} - (\text{جاس})^{-1} + \text{ث}$$

$$= -\ \text{ظتاس} - \frac{1}{\text{جاس}} + \text{ث}$$

٢٨) $\int \frac{(5+\text{ظاس})^3}{\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ء س}$

$$= \int \text{قا}^2\text{س}(5+\text{ظاس})^3\ \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{4}(5+\text{ظاس})^4 + \text{ث}$$

٢٩) $\int \frac{\text{جا}^2\text{س} - \text{جاس} - 2}{2 - \text{جاس}}\ \text{ء س} = \int \frac{(\text{جاس}-2)(\text{جاس}+1)}{2-\text{جاس}}\ \text{ء س}$

$$= -\int (\text{جاس}+1)\ \text{ء س}$$

$$= -(-\ \text{جتاس} + \text{س}) + \text{ث}$$

٣٠) $\int \frac{25-\text{س}^2}{2\text{س}-10}\ \text{ء س} = \int \frac{(5+\text{س})(5-\text{س})}{2(\text{س}-5)}\ \text{ء س}$

$$= -\frac{1}{2}\int (5+\text{س})\ \text{ء س}$$

$$= -\frac{1}{2}(5\text{س} + \frac{1}{2}\text{س}^2) + \text{ث}$$

٣١) $\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}+3}}{2-2\ \text{جتا}^2\text{س}}\ \text{ء س}$

$$= \int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}+3}}{2(1-\text{جتا}^2\text{س})}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\text{ظتاس}+3}}{\text{جا}^2\text{س}}\ \text{ء س} = \frac{1}{2}\int \text{قتا}^2\text{س}\sqrt{\text{ظتاس}+3}\ \text{ء س}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (-\ \text{قتا}^2\text{س})\sqrt{\text{ظتاس}+3}\ \text{ء س} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (-\ \text{قتا}^2\text{س}) \times (\text{ظتاس}+3)^{\frac{1}{2}}\ \text{ء س}$$

$$= \frac{1}{3} \times (\text{ظتاس}+٣)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

٣٢) $\int \frac{\sqrt{\text{جا}^{2}\text{س}+4}}{\text{قاس}}$ **جاس ءس**

$$= \frac{1}{2} \int (\text{جا}^{٢}\text{س}+٤)^{\frac{1}{2}} \times ٢\text{جاس جتاس ءس}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} (\text{جا}^{٢}\text{س}+٤)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{3} \times (\text{جا}^{٢}\text{س}+٤)^{\frac{3}{2}} + \text{ث}$$

٣٣) $\int$ جتا(جاس) جتاس ءس

= جا(جاس)+ ث

٣٤) $\int \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}\sqrt{\text{قاس}+3}}$ ءس

$$= \int (\text{قاس}+٣)^{\frac{-1}{2}} \text{ ظاس قاس ءس}$$

$$= ٢ \times (\text{قاس}+٣)^{\frac{1}{2}} + \text{ث}$$

$$= ٢ \times \sqrt{(\text{قاس}+٣)} + \text{ث}$$

٣٥) $\int$ جا^{٣}س جتا^{٢}س ءس

= $\int$ جاس جا^{٢}س جتا^{٢}س ءس

= $\int$ جاس جتا^{٢}س(١− جتا^{٢}س) ءس

= $\int$ جاس جتا^{٢}س ءس − $\int$ جاس جتا^{٤}س ءس

= −$\int$ (− جاس) جتا^{٢}س ءس + $\int$ − جاس جتا^{٤}س ءس

$$= \frac{-1}{3} \text{ جتا}^{٣}\text{س} + \frac{1}{5} \text{ جتا}^{٥}\text{س} + \text{ث}$$

٣٦) $\int$ ظا^{٣}س قا^{٣}س ءس

= $\int$ ظاس ظا^{٢}س قا^{٣}س ءس= $\int$ ظاس (قا^{٢}س− ١) قا^{٣}س ءس

= $\int$ ظاس (قا^{٥}س− قا^{٣}س) ءس

= $\int$ ظاس قا^{٥}س ءس− $\int$ ظاس قا^{٣}س ءس

= $\int$ (ظاس قاس) قا^{٤}س ءس− $\int$ (قاس ظاس) قا^{٢}س ءس

$$= \frac{1}{5}\,\text{قا}^{٥}\text{ س} - \frac{1}{3}\,\text{قا}^{٣}\text{ س} + \text{ث}$$

٣٧) $$\int \frac{\text{ظاس}}{\text{قا}^{5}\text{س}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{جتا}^{٥}\text{ س ظا س ء س} = \int \text{جتا}^{٤}\text{ س جا س ء س}$$

$$= - \int \text{جتا}^{٤}\text{ س}(-\text{ جا س})\text{ ء س}$$

$$= - \frac{1}{5}\,\text{جتا س} + \text{ث}$$

٣٨) $$\int \text{جا}^{٢}\text{ س جتا}^{٢}\text{ س ء س} = \int \text{جا}^{٢}\text{ س }(١ - \text{جا}^{٢}\text{ س})\text{ ء س}$$

$$= \int (\text{جا}^{٢}\text{ س} - \text{جا}^{٤}\text{ س})\text{ ء س}$$

$$= \int \text{جا}^{٢}\text{ س ء س} - \int \text{جا}^{٤}\text{ س ء س}$$

$$= \frac{1}{2}\int (١ - \text{جتا٢س})\text{ ء س} - \frac{1}{4}\int (١ - ٢\text{جتا٢س} + \text{جتا}^{٢}\text{ ٢س})\text{ ء س}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا٢س}] + \text{ث}_{١} - \frac{1}{4}\int (١ - ٢\text{جتا٢س} + [\frac{1}{2}\,(١+\text{جتا ٤س})]\text{ ء س}$$

$$= \frac{1}{2}\,[\text{س} - \frac{1}{2}\,\text{جا٢س}] + \text{ث}_{١} - \frac{1}{4}\int (\frac{3}{2} - ٢\text{جتا٢س} + \frac{1}{2}\text{جتا ٤س})\text{ ء س}$$

$$= \frac{1}{8}\,\text{س} - \frac{1}{32}\,\text{جا٤س} + \text{ث}$$

٣٩) $$\int \frac{\text{جتاس جاس}}{\text{ظاس} + \text{قاس}}\ \text{ء س} = \int \frac{\text{جتاس جاس}}{\frac{\text{جاس} + 1}{\text{جتاس}}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \frac{\text{جاس جتا}^{2}\text{س}}{\text{جاس} + 1}\ \text{ء س} = \int \frac{\text{جاس}(1 - \text{جا}^{2}\text{س})}{\text{جاس} + 1}\ \text{ء س} = \int \frac{\text{جاس}(1 + \text{جاس})(1 - \text{جاس})}{\text{جاس} + 1}\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{جاس}(١ - \text{جاس})\text{ ء س}$$

$$= \int (\text{جاس} - \text{جا}^{٢}\text{س})\text{ ء س} = \int \text{جاس ء س} - \int \text{جا}^{٢}\text{س ء س}$$

$$= -\text{ جتاس} - \frac{1}{2}\int (١ - \text{جتا٢س})\text{ ء س}$$

$$= -\text{ جتاس} - \frac{1}{2}\,\text{س} + \frac{1}{4}\,\text{جا٢س} + \text{ث}$$

٤٠) $$\int \frac{\text{قا}^{4}\text{س}}{\text{قتاس}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٤}\text{ س جاس ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٣}\text{ س ظاس ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{ س (قاس ظاس) ء س}$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{قا}^{٣}\text{ س} + \text{ث}$$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٤١) $\int \frac{\text{جا}^{7}\text{س}}{\text{جتا}^{9}\text{س}}$ ء س

= $\int$ ظا^{٧}س قا^{٢}س ء س

= $\frac{1}{8}$ ظا^{٨}س + ث

٤٢) $\int$ (ظاس − ٣)^{٤} قا^{٢} س ء س

= $\frac{1}{5}$ (ظاس − ٣)^{٥} + ث

٤٣) $\int \frac{2-\text{جاس}}{(2\text{س}+\text{جتاس})^{3}}$ ء س

= $\int$ (٢س+جتاس)$^{-٣}$ (٢− جاس) ء س

= − $\frac{1}{2}$ (٢س + جتاس)$^{-٢}$ + ث

٤٤) $\int$ ظا^{٢} ٣س ء س

= $\int$ (قا^{٢} ٣س − ١) ء س

= $\frac{1}{3}$ ظا٣س − س + ث

٤٥) $\int$ جتا^{٢} س جا٢ س ء س = $\int$ جتا^{٢}س × ٢جتاس جاس ء س

=−٢$\int$ جتا^{٣} س (− جا س) ء س

=−٢× $\frac{1}{4}$ جتا^{٤}س + ث

٤٦) $\int$ جا س جتا ٢س ء س= $\int$ جا س (٢جتا^{٢} س− ١) ء س

= $\int$ ٢جتا^{٢} س جاس ء س − $\int$ جاس ء س

=−٢$\int$ جتا^{٢} س(− جاس) ء س + جتاس + ث

= $\frac{-2}{3}$ جتا^{٣}س +جتاس + ث

٤٧) $\int$ قا^{٤} س ء س

=$\int$ قا^{٢} س قا^{٢} س ء س

= $\int$ قا^{٢} س(١+ ظا^{٢} س) ء س

= $\int$ قا^{٢} س ء س + $\int$ قا^{٢} س ظا^{٢} س ء س

= ظاس + $\frac{1}{3}$ ظا^{٣}س + ث

٤٨) $\int \frac{\text{قا}^{3}\text{س}}{\text{قتاس}}$ ء س = $\int$ قا^{٣} س جاس ء س

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

= ∫ قا^{٢} س ظاس ء س

= ∫ قا س (قاس ظاس) ء س = $\frac{1}{2}$ قا^{٢}س + ث

٤٩) ∫ $\frac{1}{1+\text{جتاس}}$ ء س = ∫ $\frac{1}{1+\text{جتاس}} \times \frac{1-\text{جتاس}}{1-\text{جتاس}}$ ء س

= ∫ $\frac{1-\text{جتاس}}{1-\text{جتا}^2\text{س}}$ ء س = ∫ $\frac{1-\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$ ء س ويكمل الحل كالمسألة رقم (٢٧)

٥٠) ∫ قتا^{٢} س (١+ ظتاس) ء س

= ∫ قتا^{٢} س ء س + ∫ قتا^{٢}س ظتاس ء س

= − ظتاس+ ث$_{١}$ − ∫ قتاس(− قتاس ظتاس) ء س

= − ظتاس − $\frac{1}{2}$ قتا^{٢} س +ث

٥١) ∫ $\frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جتا}^5\text{س}}$ ء س

= ∫ $\frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جتا}^3\text{س}} \times \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$ ء س

= ∫ ظا^{٣} س قا^{٢} س ء س

= **$\frac{1}{4}$ ظا^{٤} س +ث**

٥٢) ∫ (جتا^{٢} س− جا^{٢} س) ء س

= ∫ جتا٢ س ء س

= $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث

٥٣) ∫ (جا س+ جتا س)^{٢} ء س

= ∫ (جا^{٢} س+ ٢جا س جتا س+ جتا^{٢}س) ء س

= ∫ (١+ ٢جا س جتا س) ء س

= ∫ (١+ جا٢ س) ء س

= س− $\frac{1}{2}$ جتا٢س+ ث

٥٤) ∫ $\frac{1}{1+\text{جاس}}$ ء س

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

$$= \int \frac{1}{1+\text{جاس}} \times \frac{1-\text{جاس}}{1-\text{جاس}} \ \text{ء س} = \int \frac{1-\text{جاس}}{1-\text{جا}^2\text{س}} \ \text{ء س}$$

$$= \int \frac{1-\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س} = \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س} - \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س ء س} - \int \text{ظاس قاس ء س} \quad = \text{ظاس} - \text{قاس} + \text{ث}$$

٥٥) $\int \frac{1}{1-\text{جاس}} \ \text{ء س}$ نفس طريقة التمرين (٥٤)

٥٦) $\int \frac{\text{س}^3-4}{\text{س}\sqrt{\text{س}}-2} \ \text{ء س} = \int \frac{(\text{س}^{\frac{3}{2}}+2)(\text{س}^{\frac{3}{2}}-2)}{\text{س}^{\frac{3}{2}}-2} \ \text{ء س}$

$$= \int (\text{س}^{\frac{3}{2}} + ٢) \ \text{ء س} = \frac{2}{5} \times \text{س}^{\frac{5}{2}} + ٢\text{س} + \text{ث}$$

٥٧) $\int \frac{\text{س}-8}{\sqrt[3]{\text{س}^2}+2\sqrt[3]{\text{س}}+4} \ \text{ء س} = \int \frac{(\text{س}^{\frac{1}{3}}-2)(\text{س}^{\frac{2}{3}}+2\text{س}^{\frac{1}{3}}+4)}{(\text{س}^{\frac{2}{3}}+2\text{س}^{\frac{1}{3}}+4)} \ \text{ء س}$

$$= \int (\text{س}^{\frac{1}{3}} - ٢) \ \text{ء س} = \frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} - ٢\text{س} + \text{ث}$$

٥٨) $\int \frac{\text{جا}^3\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س} = \int \frac{\text{جاس جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س} = \int \frac{\text{جاس}(1-\text{جتا}^2\text{س})}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س}$

$$= \int \frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س} - \int \frac{\text{جاس جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \ \text{ء س}$$

$$= \int \text{جتا}^{-٢}\text{س جاس ء س} - \int \text{جاس ء س}$$

$$= - \int \text{جتا}^{-٢}\text{س}(-\text{جاس}) \ \text{ء س} + \text{جتاس} + \text{ث}$$

$$= \text{جتا}^{-١}\text{س} + \text{جتاس} + \text{ث} = \frac{1}{\text{جتا س}} + \text{جتاس} + \text{ث}$$

٥٩) $\int \frac{\text{قا}^2(\sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}} \ \text{ء س} = \int \frac{\text{قا}^2(\sqrt{\text{س}})}{\sqrt{\text{س}}} \ \text{ء س}$

نفرض $\sqrt{\text{س}} = \text{ص} \Leftrightarrow \text{س} = \text{ص}^{٢} \Leftrightarrow$

$$\text{ء س} = ٢\text{ص ء ص}$$

$$= \int \frac{\text{قا}^2\text{ص}}{\text{ص}} \ (٢\text{ص ء ص})$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{ص ء ص}$$

$$= ٢\text{ظاص} + \text{ث} = ٢\text{ظا}\sqrt{\text{س}} + \text{ث}$$

٦٠) $\int \text{قا}^{٤}\text{س ظا}^{٣}\text{س ء س}$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٣}\text{س قا}^{٢}\text{س ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٣}\text{س}(١+\text{ظا}^{٢}\text{س}) \ \text{ء س}$$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

= ∫ قا^{٢} س ظا^{٣} س ء س + ∫ قا^{٢} س ظا^{٥} س ء س

= $\frac{1}{4}$ ظا^{٤} س + $\frac{1}{6}$ ظا^{٦} س + ث

٦١) ∫ قا^{٧} س ظا س ء س

= ∫ قا^{٦} س قاس ظا س ء س

= $\frac{1}{7}$ قا^{٧} س + ث

٦٢) ∫ (٣ − س^{٣})^{٢} س ء س

= ∫ (٩ − ٦س^{٣} + س^{٦}) س ء س

= ∫ (٩س − ٦س^{٤} + س^{٧}) ء س

= $\frac{9}{2}$ س^{٢} − $\frac{6}{5}$ س^{٥} + $\frac{1}{8}$ س^{٨} + ث

٦٣) ∫ س^{٢} . (جاس^{٣}) ء س

نفرض س^{٣} = ص ⇐ ٣س^{٢} ء س = ء ص

= ∫ جاص ($\frac{1}{3}$ء ص) = $\frac{1}{3}$ ∫ جاص ء ص

= −$\frac{1}{3}$ جتاص + ث = −$\frac{1}{3}$ جتا س^{٣} + ث

٦٤) ∫ جا^{٥} س ء س = ∫ جا^{٤} س جاس ء س

= ∫ (جا^{٢} س)^{٢} جاس ء س = ∫ (١ − جتا^{٢} س)^{٢} جاس ء س

= ∫ (١ − ٢جتا^{٢} س + جتا^{٤} س) جاس ء س

= ∫ جاس ء س − ٢ ∫ جتا^{٢} س جاس ء س + ∫ جتا^{٤} س جاس ء س

= − جتا س + $\frac{2}{3}$ جتا^{٣} س − $\frac{1}{5}$جتا^{٥} س + ث

٦٥) ∫ جتا^{٥} س ء س = ∫ (جتا^{٢} س)^{٢} جتاس ء س

= ∫ (١ − جا^{٢} س)^{٢} جتاس ء س

= ∫ (١ − ٢جا^{٢} س + جا^{٤} س) جتاس ء س

= ∫ جتاس ء س − ٢ ∫ جا^{٢} س جتاس ء س + ∫ جا^{٤} س جتاس ء س

= جا س − $\frac{2}{3}$ جا^{٣} س + $\frac{1}{5}$ جا^{٥} س + ث

٦٦) ∫ (جتا^{٤} س − جا^{٤} س) ء س

= ∫ (جتا^{٢} س − جا^{٢} س)(جتا^{٢} س + جا^{٢} س) ء س

= ∫ جتا٢س ء س = $\frac{1}{2}$ جا ٢س + ث

٦٧) ∫ ظا^{٤} س ء س = ∫ (ظا^{٢} س)^{٢} ء س

= ∫ (قا^{٢} س − ١)^{٢} ء س = ∫ (قا^{٤} س − ٢قا^{٢} س + ١) ء س

= ∫ قا^{٢} س(١ + ظا^{٢} س) ء س − ٢ ∫ قا^{٢} س ء س + ∫ ء س

= ∫ قا^{٢} س ء س + ∫ قا^{٢} س ظا^{٢} س ء س − ٢ ∫ قا^{٢} س ء س + ∫ ء س

= ظاس + $\frac{1}{3}$ ظا^{٣} س −٢ظاس + س + ث

٦٨) ∫ (جا^{٢} $\frac{\text{س}}{2}$ + ٣)^{٣} . جاس ء س

نفرض د(س) = جا^{٢} $\frac{\text{س}}{2}$ + ٣

دَ(س) = ٢جا $\frac{\text{س}}{2}$ ($\frac{1}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$) = $\frac{1}{2}$ (٢ جا $\frac{\text{س}}{2}$ جتا $\frac{\text{س}}{2}$)

دَ(س) = $\frac{1}{2}$ جاس ، جاس = ٢ دَ(س)

= ∫ [د(س)]^{٣} [٢دَ(س)] ء س

= $\frac{2}{4}$[د(س)]^{٤} + ث

= $\frac{1}{2}$ (جا^{٢} $\frac{\text{س}}{2}$ + ٣)^{٤} + ث

٦٩) ∫ $\frac{\text{جا2س}}{\text{قتا}^{2}\text{س}}$ ء س

= ∫ ٢جا س جتاس جا^{٢} س ء س

= ∫ ٢ جا^{٣} س جتاس ء س = $\frac{2}{4}$ جا^{٤} س + ث = $\frac{1}{2}$ جا^{٤} س + ث

٧٠) ∫ (س^{٢} −٤س + ٤)^{٥} ء س

= ∫ [(س −٢)^{٢}]^{٥} ء س

= ∫ (س −٢)^{١٠} ء س

= $\frac{1}{11}$ (س −٢)^{١١} + ث

٧١) ∫ $\frac{\text{س جاس}^{2}}{\text{جتا}^{2}\text{س}^{2}}$ ء س = ∫ س جا س^{٢} جتا$^{-٢}$ س^{٢} ء س

= − $\frac{1}{2}$ ∫ (−٢س جاس^{٢}) جتا$^{-٢}$ س^{٢} ء س

= − $\frac{1}{2}$ × (−١) جتا$^{-١}$ س^{٢} + ث = $\frac{1}{2\ \text{جتاس}^{2}}$ + ث

٧٢) ∫ $\frac{\text{جتا2س}}{\text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س}}$ ء س = ∫ $\frac{(\text{جتا}^{2}\text{س} - \text{جا}^{2}\text{س})}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}$ ء س

= ∫ $\frac{\text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}$ ء س − ∫ $\frac{\text{جا}^{2}\text{س}}{\text{جتا}^{2}\text{س جا}^{2}\text{س}}$ ء س

$$= \int \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{ء س} - \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ء س}$$

$$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س ء س} - \int \text{قا}^{٢}\text{س ء س} = -\,\text{ظتاس} - \text{ظاس ء س}$$

٧٣) $\int \sqrt[٣]{٢\text{س}^{٥} - \text{س}^{٣}}\,\text{ء س}$

$$= \int \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}(٢\text{س}^{٢} - ١)}\,\text{ء س}$$

$$= \int \text{س}\,\sqrt[٣]{(٢\text{س}^{٢} - ١)}\,\text{ء س}$$

$$= \frac{1}{4}\int ٤\text{س}\,(٢\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{1}{3}}\,\text{ء س}$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\,(٢\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$$

$$= \frac{3}{16}\,(٢\text{س}^{٢} - ١)^{\frac{4}{3}} + \text{ث}$$

٧٤) $\int \frac{(\text{س}+1)^5}{\text{س}^7}\,\text{ء س}$

$$= \int \frac{(\text{س}+1)^5}{\text{س}^5} \times \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{ء س}$$

$$= \int \left(\frac{\text{س}+1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{1}{\text{س}^2}\,\text{ء س}$$

$$= -\int \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^5 \times \frac{-1}{\text{س}^2}\,\text{ء س} = \frac{-1}{6} \times \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{٦} + \text{ث}$$

٧٥) $\int \frac{\text{جا}\sqrt{\text{س}+1}}{\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ء س} = \int \text{جا}\,\sqrt{(\text{س}+1)} \times \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ء س}$

نفرض أن ص = $\sqrt{١ + \text{س}}$

$$\text{ء ص} = \frac{1}{2 \times \sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ء س} \quad \Leftarrow \quad ٢\,\text{ء ص} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}+1}}\,\text{ء س}$$

$$= ٢ \int \text{جا ص ء ص}$$

$$= -\,٢\,\text{جتا ص} + \text{ث}$$

$$= -٢\,\text{جتا}\,\sqrt{١ + \text{س}} + \text{ث}$$

٧٦) $\int \frac{\text{قاس}}{\text{جتاس}}\,\text{ء س}$

$$= \int \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{ء س}$$

$$= \int \text{قا}^{٢}\text{س ء س}$$

$$= \text{ظا س} + \text{ث}$$

٧٧) $\int$ جتا^{٣} س جا^{٥} س ء س

= $\int$ جتا^{٢} س جتا س جا^{٥} س ء س

= $\int$ (١ − جا^{٢} س) جتا س جا^{٥} س ء س

= $\int$ (جا^{٥} س − جا^{٧} س) جتا س ء س

= $\int$ جا^{٥} س جتاس ء س − $\int$ جا^{٧} س جتاس ء س

= $\frac{1}{6}$ جا^{٦} س − $\frac{1}{8}$ جا^{٨} س + ث

٧٨) $\int \frac{(1+\sqrt{\text{س}+1})^{5}}{\sqrt{\text{س}+1}}$ ء س

=٢ $\int \frac{1}{2\sqrt{\text{س}+1}}$ $(١+\sqrt{\text{س}+١})^{٥}$ ء س

= $\frac{2}{6}$ $(١ + \sqrt{\text{س} + ١})^{٦}$ + ث

٧٩) $\int \frac{\text{جا}^{2}\text{س} - \text{جتا}^{2}\text{س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ءس

= $\int \frac{(\text{جاس} + \text{جتاس})(\text{جاس} - \text{جتاس})}{\text{جاس} - \text{جتاس}}$ ءس ء س

= $\int$ (جاس + جتاس) ء س

=− جتاس + جا س + ث

٨٠) $\int_{٠}^{١}$ س^{٣} × $\sqrt{\text{س}^{٢}+٣}$ ء س

نفرض س^{٢} + ٣ = ص

$\Leftarrow$ س^{٢}= ص−٣

$\Leftarrow$ ٢س ء س = ء ص

س . ء س = $\frac{1}{2}$ ء ص

عندما س= ٠ $\Leftarrow$ ص = ٣

و عندما س= ١ $\Leftarrow$ ص = ٤

= $\int_{٣}^{4}$ (ص−٣) $\sqrt{\text{ص}}$ ($\frac{1}{2}$ءص)

$$= \frac{1}{2} \int_{٣}^{4} \left(ص^{\frac{3}{2}} - ٣\, ص^{\frac{1}{2}} \right) ءص$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} - ٣ \times \frac{2}{3} ص^{\frac{3}{2}} \right]_{3}^{4}$$

$$= \left[\frac{1}{5} \times (٤)^{\frac{5}{2}} - (٤)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{1}{5} \times (٣)^{\frac{5}{2}} - (٣)^{\frac{3}{2}} \right] =$$

$$= \left(\frac{32}{5} - ٨ \right) - \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{٢٤٣} - \sqrt{٢٧} \right) = -٤,١٩٩$$

٨١) $\int$ س جتا س ء س

$= \int$(س جتاس + جاس − جاس) ء س

$= \int$(س جتاس + جاس) ء س − $\int$ جاس ء س

$= \int \frac{ء}{ءس}$(س جاس) ء س − $\int$ جاس ء س

= س جاس + جتاس + ث

٨٢) $$\int_{١}^{8} \frac{(1+س^{\frac{2}{3}})^{3}}{س^{\frac{1}{3}}} ءس = \int_{١}^{8} (1+س^{\frac{2}{3}})^{3} \times \frac{ءس}{س^{\frac{1}{3}}}$$

نفرض ١ + س$^{\frac{2}{3}}$ = ص

$\frac{2}{3}$ س$^{-\frac{1}{3}}$ ء س = ء ص

$\frac{ءس}{س^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}$ ء ص

عندما س=١ ⇐ ص = ٢

عندما س=٨ ص=٥

$$\int_{١}^{8} \frac{(1+س^{\frac{2}{3}})^{3}}{س^{\frac{1}{3}}} = \int_{٢}^{5} ص^{٣} \, \frac{3}{2} \, ءص$$

$$= \frac{3}{2} \int_{٢}^{٥} ص^{٣} \, ءص = \frac{3}{2} \left[\frac{ص^{4}}{4} \right]_{2}^{5}$$

$$= \frac{3}{8} \left(٥^{٤} - ٢^{٤} \right) = \frac{1827}{8}$$

٨٣) $\int_{١}^{2} \sqrt{١ - س}$ ء س =

$\sqrt{١ - س}$ معرفة بشرط أن ١− س $\geq$ ٠ ⇐ س $\leq$ ١ ⇐ س $\in$ (-∞ ، ١]

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

د(س) معرفة على الفترة (-∞ ، ١] أو على أي فترة جزئية منها

$[١ ، ٢] \not\subset (-\infty ، ١]$

∴ الدالة د(س) = $\sqrt{١ - \text{س}}$ غير قابلة للتكامل على هذه الفترة

٨٤) $\int_{1}^{2} \frac{\text{س}^3 - \text{س}}{\text{س} - 1} \, \text{ء س} = \int_{1}^{2} \frac{\text{س}(\text{س}+1)(\text{س}-1)}{\text{س}-1} \, \text{ء س}$

$= \int_{1}^{2} \text{س}(\text{س}+1) \, \text{ء س}$

$= \int_{1}^{2} (\text{س}^{٢} + \text{س}) \, \text{ء س} = \left[\frac{1}{3}\text{س}^{٣} + \frac{1}{2}\text{س}^{٢} \right]_{1}^{2} = \frac{23}{6}$

٨٥) $\int_{1}^{2} \frac{1}{\text{س}^2 + 4\text{س} + 4} \, \text{ء س} = \int_{1}^{2} \frac{1}{(\text{س}+2)^2} \, \text{ء س}$

$= \int_{1}^{2} (\text{س}+٢)^{-٢} \, \text{ء س}$

$= \left[-١ \times (\text{س} + ٢)^{-١} \right]_{1}^{2} = \left[\frac{-1}{\text{س}+2} \right]_{1}^{2} = \frac{1}{12}$

٨٦) $\int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \sqrt{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}} \, \text{ء س} = \int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \sqrt{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{ء س}$

$= \int_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} \text{جتا س} \, \text{ء س} = \left[\text{جا س} \right]_{0}^{\frac{\text{ط}}{2}} = \text{جا} \frac{\text{ط}}{2} - \text{جا} ٠ = ١$

٨٧) $\int_{٠}^{٦} (٥\text{س} + |\text{س} - ٢|) \, \text{ء س} = \int_{٠}^{٢} (٤\text{س} + ٢) \, \text{ء س} + \int_{٢}^{٦} (٦\text{س} - ٢) \, \text{ء س}$

$= \left[٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} \right]_{0}^{2} + \left[٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س} \right]_{2}^{6} = ١٠٠$

٨٨) $\int_{٣}^{2} ٢\text{س} \, \text{ء س} + ٣\int_{٣}^{2} \text{د(س)} \, \text{ء س}$

$= \left[\text{س}^{٢} \right]_{3}^{2} + ٣ \times ٣ = ٤ - ٩ + ٩ = ٤$

٨٩) إذا كان د(س) $\leq$ ٥ لكل س $\in$ [١ ، ٣] أوجد أكبر قيمه للدالة $\int_{١}^{٣} [٢ \text{د(س)} + ١] \, \text{ء س}$

الحل

$\int_{١}^{٣} [٢\text{د(س)} + ١] \, \text{ء س} \leq \int_{١}^{٣} (٢ \times ٥ + ١) \, \text{ء س}$

$= \int_{١}^{٣} ١١ \, \text{ء س} = ١١(٣ - ١) = ٢٢$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٩٠) إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س د}(\text{٢س}+\text{١})\ \text{ء س} = \text{٥}$

أوجد قيمة $\int_{\text{أ}-\text{٢}}^{\text{ب}-\text{٢}} (\text{٢س}+\text{٤})\ \text{د}(\text{٢س}+\text{٥})\ \text{ء س}$

الحل: $\text{ع} = \int_{\text{أ}-\text{٢}}^{\text{ب}-\text{٢}} (\text{٢س}+\text{٤})\ \text{د}(\text{٢س}+\text{٥})\ \text{ء س}$

$= \int_{\text{أ}-\text{٢}}^{\text{ب}-\text{٢}} \text{٢}(\text{س}+\text{٢})\ \text{د}[\text{٢}(\text{س}+\text{٢})+\text{١}]\ \text{ء س}$

$\text{ص} = \text{س}+\text{٢}$ ، عندما $\text{س} = \text{أ}-\text{٢}$

$\Leftarrow \text{س}+\text{٢} = \text{أ} \Leftarrow \text{ص} = \text{أ}$

$\text{ء ص} = \text{ء س}$ ،عندما $\text{س} = \text{ب}-\text{٢}$

$\Leftarrow \text{س}+\text{٢} = \text{ب} \Leftarrow \text{ص} = \text{ب}$

$\Leftarrow \text{ع} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{٢ص د}(\text{٢ص}+\text{١})\ \text{ء ص} = \text{٢}\times\text{٥} = \text{١٠}$

٩١) إذا كان $\int_{\text{١}}^{\text{أ}} \text{٢س}\ \text{ء س} = \text{١٥}$ أوجد قيمة أ

الحل: $\int_{\text{١}}^{\text{أ}} \text{٢س ء س} = [\text{س}^{\text{٢}}]_{1}^{\text{أ}} = \text{أ}^{\text{٢}} - \text{١} = \text{١٥} \Leftarrow \text{أ}^{\text{٢}} = \text{١٦} \Leftarrow \text{أ} = \pm \text{٤}$

٩٢) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} [\text{٣ د}_{\text{١}}(\text{س}) - \text{٤ د}_{\text{٢}}(\text{س})]\ \text{ء س}$

$= \text{٣} \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{د}_{\text{١}}(\text{س})\ \text{ء س} - \text{٤} \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{د}_{\text{٢}}(\text{س})\ \text{ء س} = -\text{١}$

$= \text{٣} \times \text{٥} - \text{٤} \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{د}_{\text{٢}}(\text{س})\ \text{ء س} = -\text{١} \Leftarrow \int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{د}_{\text{٢}}(\text{س})\ \text{ء س} = \frac{-1-15}{-4} = \text{٤}$

٩٣) إذا كان $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ء س}^2} = \text{٢س}+\text{١}$ عند كل نقطة (س ، ص) من منحنى ما أوجد معادلة المنحنى الذي يمر في (٢،٢) ويمس المستقيم ص=٢س+١ عند(٢،٢)

الحل : $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \int (\text{٢س}+\text{١})\ \text{ء س}$

$= س^{٢} + س + ث_{١}$

المستقيم ص = ٢س +١

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = ٢$

$\Leftarrow ٢ = ٤ + ٢ + ث_{١}$

ث١ = - ٤

$\Leftarrow \frac{ءص}{ءس} = س^{٢} + س - ٤$

$ص = \int (س^{٢} + س - ٤)\ ءس = \frac{1}{3} س^{٣} + \frac{1}{2} س^{٢} - ٤س + ث_{٢}$

$٢ = \frac{8}{3} + ٢ - ٨ + ث_{٢} \Leftarrow ث_{٢} = \frac{16}{3}$

$ص = \frac{1}{3} س^{٣} + \frac{1}{2} س^{٢} - ٤س + \frac{16}{3}$

٩٤) أوجد الدالة الأصلية للدالة $د(س) = \frac{1 - جاس}{س + جتاس}$

$ل(س) = \int \frac{1 - جاس}{س + جتاس}\ ءس$

= لو | س+ جتاس| + ث

٩٥) أثبت أن الدالة $ل(س) = ظا^{٢}\ ٣س + ث$ دالة أصلية للدالة

$د(س) = \frac{6جا3س}{جتا^{3}3س}$ في الفترة $[٠ ، \frac{ط}{12}[$

الحل :

$لَ(س) = ٢ظا٣س \times قا^{٢}\ ٣س \times ٣$

$= ٦ \times \frac{جا3س}{جتا3س} \times \frac{1}{جتا^{2}3س} = \frac{6جا3س}{جتا^{3}3س} = د(س)$

$\therefore$ ل(س) دالة أصلية للدالة د(س)على الفترة $[٠ ، \frac{ط}{12}[$

٩٦) أوجد مجموع ريمان للدالة $د(س) = ٢س^{٢} - ١$ حيث س $\in$[٠، ٢] مستخدماً التجزيء التالي

$ت_{ن}(٠، ٢) = (٠ ، ١ ، ٢)$ والنقط $جـ_{١} = \frac{1}{2}$ $جـ_{٢} =$ ، $جـ_{٣} = \frac{3}{2}$ الفترات الجزئية القائمة

هي $[٠، \frac{1}{2}]، [\frac{1}{2}، ١]، [١، ٢]$

$\Delta س_{١} = \frac{1}{2}$ ، $\Delta س_{٢} = \frac{1}{2}$ $\Delta س_{٣} = ١$

$د(جـ_{١}) = ٢ (\frac{1}{2})^{٢} - ١ = -\frac{1}{2}$ ، $د(جـ_{٢}) = ٢ (١)^{٢} - ١ = ١$ ، $د(جـ_{٣}) = ٢ (\frac{3}{2})^{٢} - ١ = \frac{7}{2}$

مجموع ريمان هو $\sum_{ر=1}^{3}$ د(جـ ر) . Δ س ر =

= $-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times ١+\frac{7}{2}\times ١ = \frac{15}{4}$

٩٧) أوجد $\int_{٠}^{٣}$ د(س) ء س حيث د(س)= $\begin{cases} س^3+3 & س \le 1 \\ -س^2+5 & س > 1 \end{cases}$

الحل : $\int_{٠}^{١}$ د(س) ء س + $\int_{١}^{٣}$ د(س) ء س

$\int_{٠}^{١}$ (س^{٣} +٣) ء س + $\int_{١}^{٣}$ (− س^{٢} +٥) ء س

= $\left[\frac{س^4}{4}+٣س\right]_0^1 + \left[-\frac{س^3}{3}+٥س\right]_1^2$

= $\left(\frac{1}{4}+٣\right)+\left(-\frac{27}{3}+١٥\right)-\left(-\frac{1}{3}+٥\right)=\frac{65}{12}$

٩٨) ابحث قابلية الدالة للتكامل د(س)= ٢س^{٢} ظا٣س على [٠ ، ط]

الحل : د(س) = ٢س^{٢} ظا٣س ف = [٠ ، ط]

د(س) غير معرفة عندما س= $\frac{ط}{6}$ ∈ [٠ ، ط] ⇐

د(س) غير قابلة للتكامل على [٠ ، ط]

٩٩) إذا كانت الدالة د متصلة على [٢، ٦] فأوجد

$\int_{٢}^{٣}$ د(س) ء س + $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س + $\int_{٥}^{٢}$ د(س) ء س

الحل :

ص= $\int_{٢}^{٥}$ د(س) ء س + $\int_{٥}^{٢}$ د(س) ء س= $\int_{٢}^{٢}$ د(س) ء س=٠

١٠٠) أوجد قيمة س التي تحققها نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$\int_{-٢}^{١}$ (٣س^{٢} − ١) ء س

الحل * ص= $\int_{-٢}^{١}$ (٣س^{٢} − ١) ء س = (١+٢) د(س.)

= $[س^{٣} - س]_{-2}^{1}$ = ٣ د(س.)

⇐ (١ − ١) − (−٨ + ٢) = ٣ د(س.)

⇐ ٦= ٣ د(س.)

⇐ ٢= ٣$س_0^2$ − ١ ⇐ ٣= ٣$س_0^2$

⇐ $س^{2}_{0}$ =١ ⇐ س = ± ١ ∍ [−٢ ، ١]

١٠١) إذا كان $\int_{2}^{6}$ د(س) ء س=١٦ وكان $\int_{3}^{2}$ د(س) ء س=−٤ ، $\int_{5}^{6}$ د(س) ء س = ٥

أوجد $\int_{3}^{5}$ د(س) ء س ، $\int_{2}^{3}$ ٥×د(س) ء س ، $\int_{6}^{6}$ د(س) ء س

الحل : * $\int_{2}^{6}$ د(س) ء س = $\int_{2}^{3}$ د(س) ء س+ $\int_{3}^{5}$ د(س) ء س + $\int_{5}^{2}$ د(س) ء س

١٦= −٤+ $\int_{3}^{5}$ د(س) ء س + ٥ ⇐ $\int_{3}^{5}$ د(س) ء س=٧ ،

* $\int_{3}^{2}$ ٥×د(س) ء س= − ٥× $\int_{2}^{3}$ د(س) ء س =−٥× (−٤)=٢٠ ،

* $\int_{6}^{6}$ د(س) ء س=٠

١٠٢) إذا كان د(س)= س ، ر(س)= $\frac{5}{س^{2}}$ أثبت أن $\int_{3}^{6}$ د(س) ء س > $\int_{3}^{6}$ ر(س)ء س

الحل : د(س) − ر(س) = س − $\frac{5}{س^{2}}$ = $\frac{س^{3}-5}{س^{2}}$

بدراسة إشارة د(س) − ر(س) نجد $\frac{س^{3}-5}{س^{2}}$ ≥ ٠ لكل س∍ [٣ ، ٦]

أي أن د(س) ≥ ر(س) على الفترة [٣، ٦] ⇐

$\int_{3}^{6}$ د(س) ء س > $\int_{3}^{6}$ ر(س)ء س

١٠٣) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع ت= جتا٢ن حيث ن هي الزمن بالثواني

أوجد بدلالة الزمن كلاً من سرعة الجسيم والمسافة المقطوعة علماً بأن الجسيم انطلق من

نقطة الأصل بسرعة مقدارها ٤م/ ث

ع = $\int$ ت ء ن

= $\int$ جتا٢ن ءن

= $\frac{1}{2}$ جا٢ن + ث١ عندما ن= ٠ تكون ع=٤

⇐ ٤ = $\frac{1}{2}$ جا (٠) + ث١

⇐ ث١ = ٤

∴ ع = $\frac{1}{2}$ جا ٢ن + ٤

ف = ∫ ع ء ن

ف = ∫ ($\frac{1}{2}$ جا ٢ن + ٤) ء ن

= − $\frac{1}{4}$ جتا٢ن +٤ن + ث٢ عندما ن=٠ تكون ف=٠

⇐ ٠ = − $\frac{1}{4}$ جتا٠ +٠ + ث٢

⇐ ث٢ = $\frac{1}{4}$

∴ ف = − $\frac{1}{4}$ جتا٢ن +٤ن + $\frac{1}{4}$

١٠٤) أوجد معادلة المنحنى ص= د(س)، إذا كان $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ = $\sqrt[3]{س}$ −٥ وميل المنحنى عند النقطة (١، −٨) هو ٢

الحـــــل

دَ(س) = ∫ $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ ء س= ∫ ($\sqrt[3]{س}$ − ٥) ء س = $\frac{3}{4}$ س$^{\frac{4}{3}}$ − ٥ س +ث

م = ٢ عند النقطة (١ ، −٨)

عند س = ١ ⇐ دَ(١) = ٢

$\frac{3}{4}$ (١)$^{\frac{4}{3}}$ − ٥ (١) + ث = ٢

ث = ٢ + ٥ − $\frac{3}{4}$ = $\frac{25}{4}$

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} - \text{٥س} + \frac{25}{4}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{ء س}$$

$$= \int \left(\frac{3}{4}\text{س}^{\frac{4}{3}} - \text{٥س} + \frac{25}{4}\right)\text{ء س}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{7}\text{س}^{\frac{7}{3}} - \frac{5}{2}\text{س}^{٢} + \frac{25}{4}\text{س} + \text{ث}$$

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، −٨)

$$\Leftarrow \text{د}(١) = -٨$$

$$\Leftarrow \frac{9}{28}(١)^{\frac{7}{3}} - \frac{5}{2}(١)^{٢} + \frac{25}{4}(١) + \text{ث} = -٨$$

$$\Leftarrow \text{ث} = -\frac{169}{14}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{9}{28}\text{س}^{\frac{7}{3}} - \frac{5}{2}\text{س}^{٢} + \frac{27}{4}\text{س} - \frac{169}{14}$$

١٠٥) ارسم منحنى الدالة د(س) إذا كانت د'(س) = ٣س^{٢} −٣ والمنحنى يمر بالنقطة (٠، ٢) مبيناً النقط الحرجة ونقط الانقلاب إن وجدت.

$$\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س})\,\text{ء س} = \int (\text{٣س}^{٢} - ٣)\,\text{ء س}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{3} \times \text{٣س}^{٣} - \text{٣س} + \text{ث} = \text{س}^{٣} - \text{٣س} + \text{ث}$$

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢) أي د(٠) = ٢

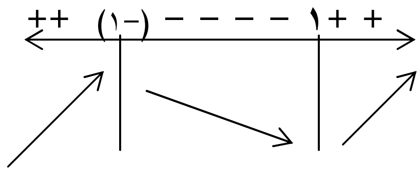
$$(٠)^{٣} - ٣(٠) + \text{ث} = ٢ \quad \Leftarrow \text{ث} = ٢$$

$$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{٣س} + ٢$$

<u>النقطة الحرجة:</u> $\text{د}'(\text{س}) = \text{٣س}^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow \text{٣س}^{٢} = ٣ \Leftarrow \text{س}^{٢} = ١$

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

س = $\pm\sqrt{١}$ = $\pm$ ١ نقطتان حرجتان



د(-١) = -١ + ٣ + ٢ = ٤ قيمة عظمى محلية

د(١) = ١ - ٣ + ٢ = ٠ قيمة صغرى محلية

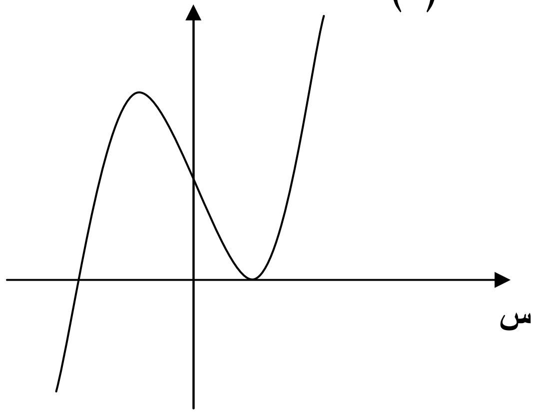
<u>نقط الانقلاب:</u> اشارة دً + صفر -

دً(س) = ٦س ⇐ ٦س=٠ ⇐ س=٠ اتجاه التقعر

د(٠) = ٢ (٠ ، ٢) نقطة انقلاب

<u>القيمة المساعدة:</u> د(-٢) = -٨ + ٦ + ٢ = ٠ د(٢) = ٨ - ٦ + ٢ + ٤

س	-١	١	-٢	٢	٠
ص	٤	٠	٠	٤	٢



تمارين

الباب الثالث

تطبيقات على التكامل

أولاً: المساحات:

في كل مما يلي أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالمنحنيات ومحور السبعينات والمستقيمات المبينة مع كل منها إن وجدت:–

١) ص = س^{٢} ـ ٤س + ٣ ، س = –١ ، س = ٤

٢) ص = س^{٣} ـ ٦س^{٢} + ٨س ومحور السينات

٣) ص= |س ـ ٤| ، س = ٢ ، س = ٦ (٤ وحدات مربعة)

٤) ص=|س^{٢} ـ ٥س + ٦| ، س = ٠ ، س = ٤

٥) ص= $(٢س + ١)^٢$ ، س = −١ ، س = ٢

٦) ص= $\frac{1}{\sqrt{س}}$ ، س = ١ ، س = ٤

٧) ص=٨ ـ $س^٢$ ، ص=$س^٢$ ، س= ٠ ، س = ١

٨) ص= $س^٣$ ـ $٣س^٢$ ـ ٣س + ١ ، ص = ١ − $س^٢$

٩) ص = $س^٢$ ، ص = $\frac{س^2}{3}$ + ٢ ($5\frac{1}{3}$ وحدات مربعة)

١٠) ص= $\frac{س^2}{3}$ − س+١ ، ص = − $\frac{س^2}{4}$ + ٣س ـ ٥ ($5\frac{1}{3}$ وحدات مربعة)

١١) ص = ٦ ـ $٣س^٢$ ، ص = ٣س وفوق [٠، ٢]

١٢) ص = $س^٢$ ، ص = $س^٣$ ، [−١ ، ٢]

١٣) ص = ٤ جتاس ، ص = ٣ جا$\frac{1}{2}$س ، [٠،ط]

١٤) ص = س ، ص = ٣س ، س + ص = ٤ [قسم إلى مساحتين]

١٥) ص = $س^٢$ ، س = $ص^٢$ ($\frac{١}{٣}$ وحدة مربعة).

١٦) ص = $e^{-س}$ ، ص = $e^{س}$ [٠ ، ١]

١٧) ص = $(١+س^٣) \times \sqrt{٤س + س^٤}$ ، س = ١ ، س = ٣

١٨) ص = ٤ ـ $س^٢$ ، ص = −٣س

١٩) أوجد المساحة المحصورة بين القطع المكافئ. $ص^٢$ = ٤س والمستقيم س =٩

٢٠) باستخدام التكامل أوجد مساحة شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيين ٦سم، ٤سم والبعد بينهما ٥سم.

٢١) باستخدام التكامل أوجد مساحة مربع طول ضلعه أ.

٢٢) إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = ٤س +١وفوق [ب،٣] هي٢١ وحدة مربعة. فما قيمة ب علماً أن المساحة واقعة فوق محور السينات ؟

حلول بعض التمارين

٤) ص=|س^{٢} − ٥س + ٦| ، س = ٠ ، س = ٤

الحل

س^{٢}−٥س+٦=٠ ⇐ (س−٣)(س−٢)=٠ ⇐ أما س=٢ أو س=٣

اشارة س^{٢}−٥س+٦   ٠+ + + + + + ٢ − − − − − − − ٣ + + + + +٤

|س^{٢}−٥س+٦| (س^{٢}−٥س+٦) | −(س^{٢}−٥س+٦) | (س^{٢}−٥س+٦)

∫ ص ءس = ∫$_{٠}^{٢}$ (س^{٢}−٥س+٦)ء س − ∫$_{٢}^{٣}$ (س^{٢}−٥س+٦)ء س + ∫$_{٣}^{٤}$ (س^{٢}−٥س+٦)ء س

$=[\frac{1}{3}س^{٣}-\frac{5}{2}س^{٢}+٦س]_{0}^{2}-[\frac{1}{3}س^{٣}-\frac{5}{2}س^{٢}+٦س]_{2}^{3}+[\frac{1}{3}س^{٣}-\frac{5}{2}س^{٢}+٦س]_{3}^{4}$

$=\frac{17}{3}$ **وحدة مربعة**

٦) ص= $\frac{1}{\sqrt{س}}$ ، س = ١ ، س = ٤

م=∫$_{١}^{٤}$ **$(\frac{1}{\sqrt{س}})$ء س =** ∫$_{١}^{٤}$ س$^{-\frac{1}{2}}$ء س

$= [\frac{2}{1}س^{\frac{1}{2}}]_{1}^{4}$

=٢ وحدة مربعة

٨) ص$_{١}$= س^{٣} − ٣س^{٢} − ٣س + ١ ، ص$_{٢}$ = ١ − س^{٢}

الحل

ص$_{١}$=ص$_{٢}$ ⇐ س^{٣}−٣س^{٢}−٣س+١=١− س^{٢} ⇐س^{٣}−٢س^{٢}−٣س=٠

س(س−٣)(س+١)=٠ أما س=٠ ، أو س=٣ ،أو س=−١

إشارة ص$_{١}$−ص$_{٢}$ −١ + + + ٠ − − − − − − − − ٣

م= ∫$_{-١}^{٠}$(س^{٣}− ٢س^{٢}−٣س) ء س− ∫$_{٠}^{٣}$(س^{٣}− ٢س^{٢}−٣س)ء س

$=[\frac{1}{4}س^{٤}-\frac{2}{3}س^{٣}-٣\times\frac{1}{2}س^{٢}]_{-1}^{0}-[\frac{1}{4}س^{٤}-\frac{2}{3}س^{٣}-٣\times\frac{1}{2}س^{٢}]_{0}^{3}=\frac{71}{6}$ **وحدة مربعة**

١٦) ص = e$^{-س}$ ، ص = e^{س} [٠ ، ١]

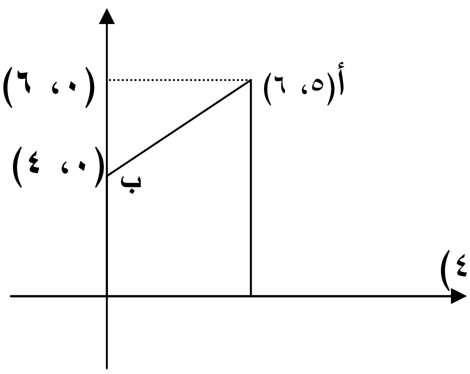
الحل

$e^{-س} = e^{س} \Leftarrow e^{٢س} = ١ \Leftarrow$ ٢س=٠ $\Leftarrow$ س=٠

م= $\int_{٠}^{١} (e^{س} - e^{-س})$ ء س $= [e^{س} + e^{-س}]_{0}^{1}$

$= e + e^{-١} - ٢$ وحدة مربعة

٢٠) باستخدام التكامل أوجد مساحة شبه منحرف طول قاعدتيه المتوازيين ٦سم، ٤سم والبعد بينهما ٥سم.



الحل

نوجد معادلة المستقيم أ ب المار من أ ، ب

$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث أ(٥، ٦) ب(٠، ٤)

$\frac{ص - 4}{س - 0} = \frac{6 - 4}{5 - 0} \Leftarrow$ **ص=** $\frac{2}{5}$ **س+٤**

م= $\int_{٠}^{٥} (\frac{2}{5}$ س+٤) ء س =$[\frac{1}{5}$ س^{٢} +٤س$]_{0}^{5}$

$= (\frac{1}{5} \times ٥^{٢} + ٤ \times ٥) - (٠) = ٢٥$ سم^{٢}

٢٢) إذا كانت المساحة المحصورة بين منحنى الدالة د(س) = ٤س +١وفوق [ب،٣] هي ٢١ وحدة مربعة. فما قيمة ب علماً أن المساحة واقعة فوق محور السينات؟

الحل

م=$\int_{ب}^{٣}$(٤س+١)ء س=$[$٢س^{٢}+ س$]_{ب}^{٣}$ =(٢×٩+٣)−(٢ب^{٢}+ ب)=٢١−٢ب^{٢}−ب

لكن م=٢١ $\Leftarrow$ ٢١−٢ب^{٢}− ب=٢١ $\Leftarrow$ ٢ب^{٢}+ب=٠

إما ب=٠ أو ب=−٢ مرفوضة لأنها تجعل المساحة تحت محور السينات و فوق محور السينات وهذا مخالف المعطى :. ب=الصفر هو الحل

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

ثانياً: الحجوم:

احسب حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنيات المذكورة دورة كاملة حول محور السينات والمستقيمات المعطاة إن وجدت:

١) ص = س ، س = ١ ، ص = ٠

٢) ص = س^{٢} ، ص = ٩

٣) ص = جا س ، ص = جتا س [٠ ، $\frac{ط}{4}$]

٤) ص = س^{٢} ، ص = −٢س −٣ ($\frac{1088}{5}$ وحدة مكعبة)

٥) ص = $\frac{س}{2}$ ، ص = س

٦) ص = س^{٢} ، ص = − س^{٢} + ٢

٧) ص = ٤س − س^{٢} ، ص = ٢س

٨) ص = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٥ ، ص = س + ٢

٩) إذا كانت : أ (−٢ ،١) ، ب = (٢، ٤)، جـ= (٥ ، ٠) فأوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المثلثية أ ب جـ حول محور السينات دوره كاملة.

١٠) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى:

ص^{٢} = ٤س ومحور السينات والمماس للمنحنى عند النقطة (١ ،٢) الواقعة عليه عندما يدور دورة كاملة حول محور السينات.

١١) إذا دارت المنطقة المحدودة بمنحنى القطع الناقص: $\frac{س^2}{9}+\frac{ص^2}{4}=$ ١ حول محور السينات دورة كاملة فأوجد حجم الجسم الناشئ عن الدوران.

١٢) من النقطة (٣ ،٢) الواقعة على منحنى القطع ص^{٢} = ٢(س−١) رسم مماس للقطع. أوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المماس ومنحنى القطع ومحور السينات دورة كاملة حول المحور السيني.

١٣) باستخدام التكامل أوجد حجم مخروط ناقص طولا نصفي قطري قاعدتيه ٤،٦سم وارتفاعه ٨سم.

١٤) باستخدام التكامل أوجد حجم كره نصف قطرها ٦سم.

حلول بعض التمرينات السابقة على الحجوم

١) ص١= س ، س=١ ص٢=٠

ندرس التقاطع ص١=ص٢ ⇐ س=٠

ح= ط $\int_{٠}^{١}$ س٢ ء س = ط $[\frac{1}{3}$س٣$]_{0}^{1}$ = ط× $\frac{1}{3}$ وحدة حجم

٨) ص١= س٣-٣س٢+٥ ص٢= س+٢

ندرس التقاطع ص١= ص٢ ⇐ س٣-٣س٢- س+٣=٠ س٢(س-٣) –(س-٣)=٠

⇐(س-٣)(س٢-١)=٠ ⇐(س-٣) (س-١)(س+١)=٠ ⇐

إما س=٣ أو س=١ أو س= -١

نأخذ قيمة من الفترة [-١، ١] مثل الصفر د١(٠)= +٥ و د٢(٠)= ٢

∴ ص١> ص٢ ⇐ ح١= ط $\int_{-١}^{١}$ [ص$_1^2$ - ص$_2^2$]ء س

و نأخذ قيمة من الفترة [١، ٣] مثل س=٢

د١(٢) = ١ و د٢(٢)=٤ ∴ ص٢>ص١

ح٢= ط $\int_{١}^{٣}$ [ص$_2^2$ - ص$_1^2$]ء س

ح١= ط $\int_{-١}^{١}$ [(س٣-٣س٢+٥)٢-(س+٢)٢]ء س

= ط $\int_{-١}^{١}$ [(س٦+٩س٤+٢٥-٦س٥+١٠س٣-٣٠س٢) -(س+٢)٢]ء س

=ط[($\frac{1}{7}$س٧+$\frac{9}{5}$س٥+٢٥س- س٦+$\frac{5}{2}$س٤-١٠س٣)- $\frac{1}{3}$(س+٢)٣ $]_{1-}^{1}$ =

= ٣٩,٩٧وحدة حجم

ح٢= ط $\int_{١}^{٣}$ [(س+٢)٢ - (س٦+٩س٤+٢٥-٦س٥+١٠س٣-٣٠س٢)]ء س

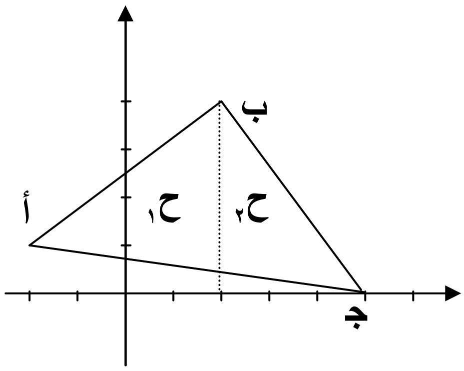
= ط[$\frac{1}{3}$(س+٢)٣ - ($\frac{1}{7}$س٧+$\frac{9}{5}$س٥+٢٥س- س٦+$\frac{5}{2}$س٤-١٠س٣)$]_{1}^{3}$ =

=٧١,٥٦٧ وحدة حجم

ح=ح١+ح٢=١١,٥٦٧وحدة حجم

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٩) إذا كانت : أ (–٢ ، ١) ، ب = (٢، ٤)، جـ= (٥ ، ٠) فأوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المثلثية أ ب جـ حول محور السينات دوره كاملة.



الحل

نوجد معادلة المستقيمات أ ب ، ب جـ ، أ جـ

معادلة المستقيم $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

معادلة أب $\frac{\text{ص}-1}{\text{س}+2} = \frac{4-1}{2+2} \Leftarrow \text{ص} = \frac{3}{4}\text{س} + \frac{5}{2}$

$\text{ص}_١ = \frac{1}{4}(٣\text{س}+١٠)$

معادلة أجـ $\frac{\text{ص}-0}{\text{س}-5} = \frac{1-0}{-2-5} \Leftarrow \text{ص}_٢ = \frac{-1}{7}(\text{س}-٥)$

معادلة ب جـ $\frac{\text{ص}-0}{\text{س}-5} = \frac{4-0}{2-5} \Leftarrow \text{ص}_٣ = \frac{-4}{3}(\text{س}-٥)$

$\text{ح}_١ = \text{ط}\int_{-٢}^{٢} \{[\frac{1}{4}(٣\text{س}+١٠)]^٢ - [\frac{-1}{7}(\text{س}-٥)]^٢\}\,\text{ء س}$

$\text{ح}_١ = \text{ط}\,[\frac{1}{144}(٣\text{س}+١٠)^٣ - \frac{1}{147}(\text{س}-٥)^٣]_{-2}^{2} = ٨١,٢٤٤$ **وحدة حجم**

$\text{ح}_٢ = \text{ط}\int_{٢}^{٥} \{[\frac{-4}{3}(\text{س}-٥)]^٢ - [\frac{-1}{7}(\text{س}-٥)]^٢\}\,\text{ء س}$

$\text{ح}_٢ = \text{ط}\,[\frac{16}{27}(\text{س}-٥)^٣ - \frac{1}{147}(\text{س}-٥)^٣]_{2}^{5} = ٤٩,٧١$ **وحدة حجم**

$\text{ح} = \text{ح}_١ + \text{ح}_٢ = ١٣٠,٩٥٤$ **وحدة حجم**

ثالثاً: تطبيقات فيزيائية:

١) يتحرك جسيم بسرعة: $\text{ع} = (٤ + \text{ن})^{\frac{1}{2}}$ متر/ث. أوجد المسافة في الخمسة ثواني الأولى من بدء الحركة.

٢) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع $\text{ت} = ٣\text{ن}^٢ + ١$. إذا كانت ن = ٠ هي لحظة بدء الحركة فأوجد سرعة الجسيم بعد ٤ ثوان من بدء الحركة والمسافة المقطوعة في نفس الزمن.

الحل

$\text{ع} = \int(٣\text{ن}^٢+١)\,\text{ء ن} = \text{ن}^٣ + \text{ن} + \text{ث} \Leftarrow$ **نعوض ع=٠ وَ ن=٠**

٠ = ٠ + ٠ + ث ⇐ ث = ٠ ⇐ ع = ن^{٣}+ن العلاقة بين السرعة و الزمن

ع(٤)= (٤)^{٣}+٤= ٦٨ وحدة سرعة

ف= $\int_0^4$ (ن^{٣}+ن) ء ن =[$\frac{1}{4}$ن^{٤} + $\frac{1}{2}$ ن^{٢}]$_0^4$ = ٧٢ وحدة مسافة

٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم مبتدئاً من نقطة الأصل عند اللحظة ن = صفر بتسارع ت = ٦ (ن – ٣). فإذا كانت سرعة الجسيم تساوي ١٤٤سم/ث عندما ن=١٠ ث. فأوجد المسافة التي يقطعها الجسيم عندما تنعدم سرعته.

الحل

ع=$\int$(٦ن- ١٨) ء ن = ٣ن^{٢}- ١٨ن + ث ⇐ **نعوض ن=١٠ وَ ع=١٤٤** ⇐

١٤٤=٣٠٠-١٨٠+ث ⇐ **ث= ٢٤** ⇐ **ع=** ٣ن^{٢}- ١٨ن +٢٤ العلاقة بين السرعة و الزمن

ف= $\int$(٣ن^{٢}- ١٨ن +٢٤) ء ن = ن^{٣}-٩ن^{٢}+٢٤ن+ ث ⇐

نعوض ف=٠ وَ ن=٠ ⇐

٠=٠-٠ + ٠+ ث ⇐ **ث= ٠** ⇐ **ف=** ن^{٣}-٩ن^{٢}+٢٤ن (العلاقة بين المسافة و الزمن) عندما

تنعدم السرع يعني ع=٠ ⇐ ٣ن^{٢}- ١٨ن +٢٤=٠ ⇐ نقسم على ٣ ⇐

ن^{٢}- ٦ن +٨=٠ ⇐ **(ن-٢) (ن-٤)=٠** ⇐ **ن=٢ أو ن=٤**

⇐ ف(٢) = ٢٠ سم ⇐ ف(٤)= ١٦ سم

٤) يتحرك جسيم بتسارع ت = ٥ -٣ ن فإذا كانت سرعة الجسم تساوي ٧سم/ث عند اللحظة ن = ٢ أوجد المسافة التي يقطعها خلال الفترة: ن = ١ إلى ن =٢ ث

٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم يتسارع ت = جتا ٢ن حيث م الزمن بالثواني. أوجد بدلالة الزمن كلا من السرعة والمسافة المقطوعة علماً بأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل بسرعة مقدارها ٤م/ث.

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

رابعاً: تطبيقات هندسية:

١) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١ ،٤) وميل مماسه عند أي نقطة عليه هو: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = −٨س.

٢) إذا كان ميل منحنى عند نقطة (س،ص) عليه هو $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣س^{٢}+٢س+٥ فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (−١ ،٥).

٣) إذا كانت $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = س^{٢}−١ عند النقطة (س،ص) من منحنى ما، فأوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة (١ ،١) ويمس المستقيم:س + ٢ص = ٣ عند النقطة (١،١).

٤) أوجد معادلة المنحنى للدالة ص = د(س) إذا كان:

أ) $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = $\sqrt[٣]{\text{س}}$ − ٥ ب) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ عندما س= ٢ ج) د(١) = −٨

٥) إذا كان: $\frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}$ = ٦س لمنحنى ما. أوجد معادلة هذا لمنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة (١، ٥) والمماس عند هذه النقطة يصنع زاوية مقدارها $\frac{\text{ط}}{4}$راديان مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٦) أوجد معادلة المنحنى: ص= د(س) إذا علم أن: دً (س) = ١٢ وأنه يمر بالنقطتين (٠ ،١) ، (١، ٣).

٧) أوجد معادلة المنحنى: ص= د(س) إذا كان ميل المنحنى عند أي نقطة عليه (س، ص) يساوي ٦ (س^{٢}− ٥س+ ٦) وكان الإحداث الصادي عند نقطة القيمة العظمى المحلية يساوي ٢٨. أوجد أيضاً القيمة الصغرى المحلية لهذا المنحنى.

٨) أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بنقطة الأصل إذا علمت أن: ميل المماس له عند أي نقطة (س،ص) واقعه عليه يساوي $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ =٣أس^{٢} + ٤ب س + ٤ ،وعندما س=−٢ يكون للمنحنى مماس يوازي محور السينات، عند س=− $\frac{4}{3}$ يكون للمنحنى نقطة انقلاب.

الحل

ص= ∫(٣أس^{٢} + ٤ب س + ٤)ء س

ص=أ س^{٣} +٢ب س^{٢} +٤س+ ث المنحنى يمر من نقطة الأصل إذاً النقطة تحقق معادلته

نعوض (٠، ٠) في المعادلة ⇐ ث =٠

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

⇐ ص= أ س^{٣} +٢ب س^{٢} +٤س   س=−٢ ⇐ صَ=٠

حسب المعطى (المماس // محور السينات عند س=−٢)

١٢أ −٨ب +٤=٠   المعادلة (١)   س= $-\frac{4}{3}$ يوجد نقطة انقلاب أي $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ =٠

صً= ٦أ س +٤ب   نعوض س=−$\frac{4}{3}$ ⇐   ٠=−٨أ +٤ب المعادلة (٢)

نضرب (٢) بالعدد ٢ و نجمع الناتج مع (١) نجد

−٤أ+٤=٠ ⇐ أ=١ نعوض في (١) نجد   ب=٢ ⇐

ص= س^{٣}+٤س^{٢}+٤س

٩) أوجد معادلة المنحنى ص = د(س) إذا كان ميل العمودي عند أي نقطة عليه (س،ص) يساوي $\sqrt{٥-٢س}$. علماً بأنه يمر بالنقطة (٢،−٣).

<u>الحل</u>: ميل المماس = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$ = $\frac{-1}{\sqrt{5-2س}}$ = −١(٥−٢س)$^{-\frac{1}{2}}$

ص= $\int$ −١(٥−٢س)$^{-\frac{1}{2}}$ ءس= (٥−٢س)$^{\frac{1}{2}}$+ ث   نعوض (٢،−٣) لإيجاد ث

−٣= ١ + ث ⇐ ث =−٤ ⇐ ص= $\sqrt{٥-٢س}$ −٤ .

" مشتقة الدوال الأسية واللوغاريتمية "

ملاحظات هامة:

لو(أ × ب) = لو أ + لو ب

لو (أ ÷ ب) = لو أ ـ لو ب

لو $أ^{ن}$ = ن لو أ

$$\text{لو}_{أ}\, س = \frac{\text{لو} س}{\text{لو} أ}$$

$$e^{\text{لو} ب} = ب$$

حيث $e = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{1}{ن!}$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية	مشتقة الدالة الأسية
$\frac{ء}{ءس}$ (لو س) = $\frac{1}{س}$ حيث س > ٠	$\frac{ء}{ءس}(e^{س}) = e^{س}$
$\frac{ء}{ءس}$ لو د(س) = $\frac{د'(س)}{د(س)}$	$\frac{ء}{ءس}(e^{د(س)}) = دَ(س) . e^{د(س)}$
لو$_{أ}$ د(س) = $\frac{د'(س)}{د(س)\ \text{لو} أ}$	$\frac{ء}{ءس}(أ^{د(س)}) = دَ(س) \times أ^{د(س)} \times$ لو أ
$\frac{ء}{ءس}$ لو|س| = $\frac{1}{س}$	$\frac{ء}{ءس}(أ^{س}) = أ^{س} \times$ لو أ

أمثلـــــــــه

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدوال التالية:

١) ص = $\sqrt{e^{٣س}}$ + $٣^{لو(س+١)}$ ٢) د(س) = لو $\sqrt{e^{س}}$

٣) ص = $e^{س^٣}$ + لو (س^٢+٤) ٤) ص = لو$_{هـ}$ $\sqrt[٣]{(٢س+٥)^٢}$

٥)ص = جا (لو ٢س) ٦) ص = لو (جا ٢س)

٧) ص = لو (لو ظا٤س) ص = $\sqrt{e^{س}}$ × لو (قا س)

تكامل الدالة الأسية

* $\int e^{س}$ ء س = $e^{س}$+ ث

* $\int e^{د(س)}$ دَ(س) ء س = $e^{د(س)}$ + ث

* $\int e^{أس+ب}$ ء س = $\frac{1}{أ}$ $e^{أس+ب}$ + ث

* $\int$ أ^{س} ء س = $\frac{أ^{س}}{لوأ}$+ ث

* $\int$ أ$^{د(س)}$ دَ(س). ء س = $\frac{أ^{د(س)}}{لوأ}$+ ث

* $\int$ جـ$^{أس+ب}$ ء س = $\frac{1}{أ \times لوجـ}$ جـ$^{أس+ب}$ + ث

الدالة الأصلية للدالة د(س) = $\frac{أس+ب}{جـس+د}$

* $\int \frac{1}{س}$ ء س= لو |س | + ث

* $\int \frac{أ}{ب س+جـ}$ ء س = $\frac{أ}{ب}$ × لو | ب س + جـ | + ث

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

عموماً: $\int \frac{د'(س)}{د(س)}$ ء س = لو |د (س)| + ث

حلول لبعض أمثلـــــــــــــة

١) $\frac{ء}{ءس}\left(\sqrt{e^{3س}} + 3^{لو(س+1)}\right) = \frac{ء}{ءس}\left(e^{\frac{3}{2}س} + 3^{لو(س+1)}\right)$

$= \frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}س} + 3^{لو(س+1)} \times \frac{1}{س+1}$ لو ٣

٢) إذا كان: د(س) = لو $\sqrt{e^{س}}$ فاثبت أن: دَ(١) = $\frac{1}{2}$

الحـــــــل

د(س) = لو $e^{\frac{1}{2}س} = \frac{1}{2}$ س

دَ(س) = $\frac{1}{2}$ ⇐ دَ(١) = $\frac{1}{2}$

٣) $\int_{0}^{1} (e^{س} + \sqrt{س} + ١)$ ء س = $\left[e^{س} + \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + س\right]_{0}^{1}$

= $e + \frac{2}{3} + ١ - ١$

= $\frac{2}{3} + e$

٤) $\int (8^{س} + e^{لوس})$ ء س = $\int (٨^{س} + س)$ ء س ، س>٠

= $\frac{1}{لو8} \times ٨^{س} + \frac{1}{2} س^{٢} +$ ث

٥) $\int_{.}^{لو ٥} e^{٢س}$ ء س = $\left[\frac{1}{2} e^{٢س}\right]_{.}^{لو ٥} = \frac{1}{2} e^{2لو ٥} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times ٢٥ - \frac{1}{2} = ١٢$

٦) $\int_{1}^{5} \text{لوس ء س} + \int_{1}^{5} \text{لو} \frac{1}{\text{س}} \text{ ء س} = \int_{1}^{5} \text{لوس ء س} - \int_{1}^{5} \text{لوس ء س} = \text{صفر}$

٧) $\int \frac{1}{\text{س لوس}} \text{ ء س} =$ نفرض أن: لو س= ص $\Leftarrow$ س = $e^{\text{ص}}$

$\Leftarrow \text{ء س} = e^{\text{ص}} \text{. ء ص}$

$\Leftarrow \int \frac{1}{e^{\text{ص}}\,\text{ص}} e^{\text{ص}} \text{ ء ص} = \int \frac{1}{\text{ص}} \text{ ء ص} = \text{لو}|\text{ص}| + \text{ث}$

$= \text{لو} |\text{لو س}| + \text{ث}$

٨) $\int \frac{e^{\text{س}} - e^{-\text{س}}}{e^{\text{س}} + e^{-\text{س}}} \text{ ء س} = \text{لو}|e^{\text{س}} + e^{-\text{س}}| + \text{ث}$

٩) $\int \frac{2^{\text{س}}}{2^{\text{س}}+1} \text{ ء س} = \frac{1}{\text{لو}2} \text{ لو}|٢^{\text{س}}+١| + \text{ث}$

أوجد دَ(س) لكل التمارين من ١ إلى ٩

١) د(س) = $\text{س}^{٢} . e^{\text{س}}$

٢) د(س) = $e^{\sqrt{\text{س}}}$

٣) د(س) = $e^{(-\text{س}^{3}+5\text{س})}$

٤) د(س) = $e^{\sqrt{\text{س}+١}}$

٥) د(س) = $\text{س}\, e^{-\text{س}}$

٦) $\text{ص}^{٣} + \text{س}\, e^{\text{ص}} = ٣\text{س}^{٢} - ١٠$

الحل $٣\text{ص}^{٢} \times \text{صَ} + ١ \times e^{\text{ص}} + \text{صَ}\, e^{\text{ص}} \times \text{س} = ٦\text{س} \Leftarrow$

ص َ(٣ص ٢ + $e^{ص}$ × س) = ٦س − $e^{ص}$ ⇐ ص َ = $\frac{6س - e^{ص}}{3ص^2 + e^{ص} × س}$

٧) س . $e^{ص}$ − ص . $e^{س}$ = ٧

الحل ١ × $e^{ص}$ + ص َ $e^{ص}$ × س − ص َ × $e^{س}$ − $e^{س}$ × ص = ٠

ص َ($e^{ص}$ × س − $e^{س}$) = − $e^{ص}$ + $e^{س}$ × ص ⇐ ص َ = $\frac{- e^{ص} + e^{س} × ص}{e^{ص} × س - e^{س}}$

٨) د(س) = $e^{لوس}$

الحل د(س) = س ⇐ د َ(س) = ١

٩) د(س) = (١ + ٢س) $e^{-٢س}$

احسب :

١٠) $\int_{١}^{٢}$ $\frac{3س}{س^2 + 4}$ ء س (البسط مشتقة المقام)

١١) $\int$ $\frac{e^{س}}{e^{س} + 1}$ ء س = لو($e^{س}$ + ١) + ث (البسط مشتقة المقام)

١٢) $\int$ $\frac{(لوس)^2}{س}$ ء س = $\frac{1}{3}$(لوس)^{٣} + ث (الدالة في مشتقتها)

١٣) $\int$ $\frac{س}{1 + س}$ ء س = $\int(\frac{-1}{1 + س} + \frac{1 + س}{1 + س})$ ء س = − لو|س+١| + س + ث

١٤) $\int$ $\frac{e^{\frac{2}{س}}}{س^2}$ ء س = $\frac{-1}{2}\int \frac{-2}{س^2} × e^{\frac{2}{س}}$ ء س = $\frac{-1}{2} e^{\frac{2}{س}}$ + ث

١٥) $\int$ $\frac{لوس^2}{س}$ ء س = $\frac{1}{2}\int \frac{2}{س}$ × لوس ٢ ء س = $\frac{1}{4}$ (لوس ٢)^{٢} + ث

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

(١٦ $\int \frac{2}{e^{2س}}$ ء س = $\int ٢ \times e^{-٢س}$ ء س = $-e^{-٢س}$ + ث

(١٧ $\int \frac{e^{س}}{(e^{س}+1)^2}$ ء س = $\int e^{س}(e^{س}+١)^{-٢}$ ء س = $-(e^{س}+١)^{-١}$ + ث = $\frac{-1}{(e^{س}+1)}$ + ث

(١٨ $\int ٣^{٤س}$ ء س = $\frac{1}{4لو3}$ $٣^{٤س}$ + ث

(١٩ $\int \frac{3^{س}}{3^{س}+1}$ ء س = $\frac{1}{لو3}$ لو($٣^{س}$+١) + ث

(٢٠ $\int ٢^{س^٢}$. س . ء س = $\frac{1}{2 \times لو2}$ $٢^{س^٢}$ + ث

(٢١ $\int س^٢ \times ٣^{س^٣}$ ء س = $\frac{1}{3 \times لو3}$ $٣^{س^٣}$ + ث

(٢٢ أوجد دَ(س) لكل مما يلي

١) ص= د(س) = $(س + ١)^{س}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

لوص = لو$(س+١)^{س}$ = س×لو(س+١) ⇐ $\frac{صَ}{ص}$ = ١×لو(س+١)+ س× $\frac{1}{س+1}$

⇐صَ =$(س + ١)^{س}$ ×[لو(س+١)+ س× $\frac{1}{س+1}$]

٢) د(س) = $س^{(س+١)}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

لود(س)= (س+١)×لوس ⇐ $\frac{د'(س)}{د(س)}$ = ١×لوس+(س+١)× $\frac{1}{س}$

دَ(س)= $س^{(س+١)}$×[لوس+(س+١)× $\frac{1}{س}$]

٣) د(س) = $١٠^{س}$ ×لوس

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

دَ(س)= ١٠^س × لو١٠ × لوس + ١٠^س × $\frac{1}{س}$

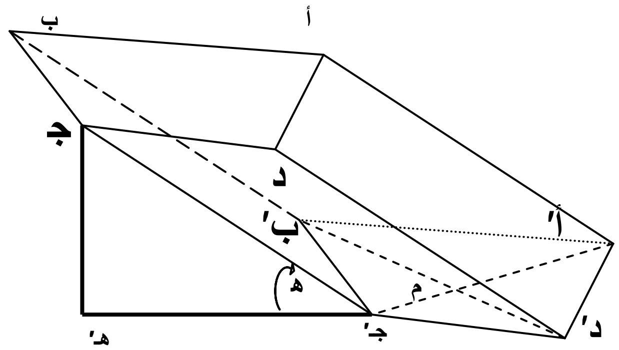
٤) د(س) = e^e دَ(س)=الصفر لأن الدالة ثابتة

٥) د(س) = $\frac{ط}{e}$ دَ(س)=الصفر لأن الدالة ثابتة

٦) د(س)=س^e دَ(س)=e×س^(e−١)

مسائل إضافية على باب الفراغية:

١) أ ب جـ د أ' ب' جـ'د' منشور رباعي طول حرفه ٣٥ سم وطولا قطري قاعدتيه ١٦سم، ٢٤سم والزاوية بينهما ٣٠° فإذا كان الحرف الجانبي للمنشور يميل على القاعدة بزاوية ظلها $\frac{3}{4}$ أوجد حجم المنشور و مساحة مقطعه القائم ٠٠٠٠



الحل

حجم المنشور = مساحة القاعدة × طول الإرتفاع ، مساحة القاعدة = ½ | أ' جـ' | × | د' ب' | × جا(أ'م د')

مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ١٦ × ٢٤ × جا٣٠° = ٩٦ سم² ، ظا (جـ جـ' هـ') = $\frac{|جـ هـ'|}{|جـ' هـ'|}$ = $\frac{3}{4}$ = ظاهـ

١+ظا²هـ = $\frac{1}{جتا^2 هـ}$ = ١+ ($\frac{3}{4}$)² = $\frac{25}{16}$ ⇐ جتا²هـ = $\frac{16}{25}$ ⇐ جا²هـ = ١- $\frac{16}{25}$ = $\frac{9}{25}$ ⇐ جاهـ = $\frac{3}{5}$

|جـ هـ'| = |جـ جـ'| × جاهـ = ٣٥ × $\frac{3}{5}$ = ٢١ سم

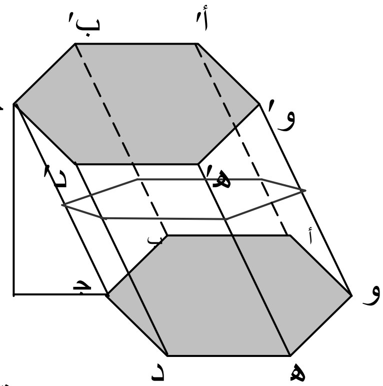
حجم المنشور = ٢١ × ٩٦ = ٢٠١٦ سم³

كذلك نعلم أن حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × طول الحرف

٢٠١٦ = مساحة المقطع القائم × ٢١ ⇐ مساحة المقطع القائم = ٢٠١٦÷٣٥= ٥٧,٦ سم²

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٢) منشور سداسي مائل يميل الحرف على مستوي القاعدة بزاوية ٦٠° قطع المنشور بمستوى عمودياً على الأحرف ، فكان المقطع القائم سداسي منتظم مساحته ٢١٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} أوجد مساحة قاعدته واذا كان طول حرفه الجانبي ٢٥سم أوجد حجم المنشور ومساحته الكلية٠



ق ×ع = مق × ف ⇐ ق= مق × $\frac{ف}{ع}$ =٢١٦ $\sqrt{٣}$ × جا٦٠° =٣٢٤ سم^{٢}

مساحة السداسي المنتظم=٦× $\frac{1}{4}$ × ل^{٢} ظتا٣٠°

٢١٦ $\sqrt{٣}$ = ١,٥ × $\sqrt{٣}$ ل^{٢} ⇐ ل^{٢}= ٢١٦÷١,٥ =١٤٤

ل= ١٢سم طول ضلع المقطع القائم

المساحة الجانبية للمنشور= محيط المقطع القائم × طول الحرف

= **٦×١٢× ٢٥ =١٨٠٠ سم^{٢}**

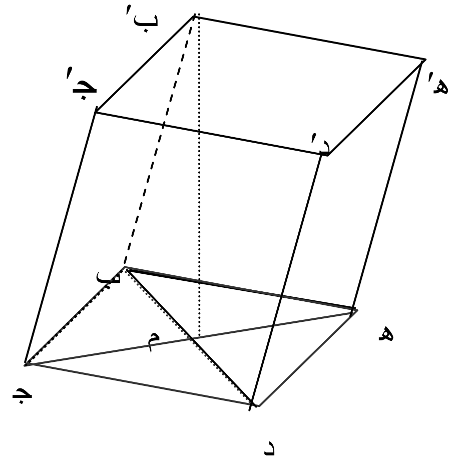
.: المساحة الكلية = ١٨٠٠+٢×١٠٨=٢٠١٦ سم^{٢}

الحجم = مساحة المقطع القائم × طول الحرف

= ٢١٦ $\sqrt{٣}$ ×٢٥ = ٥٤٠٠ $\sqrt{٣}$ سم^{٣}

٣) متوازي السطوح ب جـ د هـ - ب′جـ′ د′هـ′ قاعدته مربع طول ضلعه ص وطول حرفه يساوي ص$\sqrt{٢}$ والمسقط القائم للرأس ب′ على مستوي المربع ب جـ د هـ يقع في مركزه م و المطلوب : احسب حجم متوازي السطوح و مساحة مقطعه القائم و قياس الزاوية الزوجية بين مستوي القاعدة و مستوي المقطع القائم ٠

الحل



حجم متوازي المستطيلات = مساحة ب جـ د هـ × | ب′م|

لكن | ب′ م| = $\sqrt{(|ب′ب|)^{٢} - (|ب م|)^{٢}}$ = $\frac{ص\sqrt{6}}{2}$

حجم متوازي السطوح = ص^{٢} × $\frac{ص\sqrt{6}}{2}$ = $\frac{ص^{3}\sqrt{6}}{2}$

مساحة المقطع القائم = الحجم ÷ طول حرفه الجانبي = $\frac{ص^{3}\sqrt{6}}{2}$ ÷ ص $\sqrt{٢}$ = $\frac{ص^{2}\sqrt{3}}{2}$

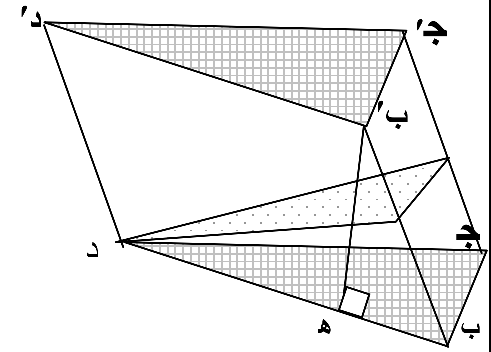
زاوية المقطع القائم مع مستوي القاعدة = الزاوية بين الحرف الجانبي و الارتفاع

يمثلها القطاع $\widehat{ب ب′ م}$ ويرمز لقياسه س فيكون جا س = $\frac{|ب م|}{|ب ب′|} = \frac{1}{2}$ ⇐ س= ٣٠° = قياس الزاوية الزوجية

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٤) ب جـ د− ب′ جـ′ د′ موشور ثلاثي مائل قاعدته ب جـ د مثلث قائم الزاوية في ب فيه | ب جـ|= ٣ سم ، | ب د|= ٨ سم ، و| ب ب′|=٤سم و مسقط ب′ على مستوي القاعدة ب جـ د هو هـ الواقعة على [ب د] حيث يكون | ب هـ| = ٢ $\sqrt{٣}$ المطلوب احسب حجم الموشور و مساحة مقطعه القائم و مساحته الجانبية

الحل



(| ب′ هـ |)^{٢}= (| ب ب′|)^{٢}−(| ب هـ |)^{٢}

=١٦ −١٢=٤ ، | ب′ هـ|=٢

الحجم = مساحة القاعدة × طول الارتفاع

= $\frac{3\times8}{2}$ ×٢=٢٤ سم^{٣}

مساحة المقطع القائم = الحجم ÷ طول الحرف

=٢٤ ÷ ٤= ٦سم^{٢}

بما أن ب جـ ⊥ ب د و′ ب′هـ ⊥ مستوي ب جـ د فإن ب′هـ ⊥ ب جـ

أي أن ب جـ ⊥ مستوي ب ب′ د أي ب جـ ⊥ ب ب′ و′ لدينا أيضاً

ب١جـ١ ⊥ ب ب′ إذاً ب١جـ١ // ب جـ أي الشكل ب جـ ب١جـ١ مستطيل

ومنه نجد |ب جـ| = | ب١جـ١|=٣ وكذلك ب١جـ١ ⊥ب١د

أي المقطع القائم مثلث قائم الزاوية في ب١

جا $\widehat{ب_١ ب د}$ = $\frac{2}{4}$ أي $\widehat{ب_١ ب د}$=٣٠° من المثلث ب ب١ د نجد |ب١ د| = |ب د| ×جا $\widehat{ب ب_١ د}$=٨×٠,٥=٤

حسب فيثاغورس في ب١جـ١د

(| جـ١ د|)^{٢}= (| ب١ جـ١|)^{٢}+(| ب١ د|)^{٢} =٩+١٦=٢٥ أي | جـ د |= ٥

المساحة الجانبية = محيط المقطع القائم × طول الحرف =(٣+٤+٥)× ٢ $\sqrt{٣}$ =٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

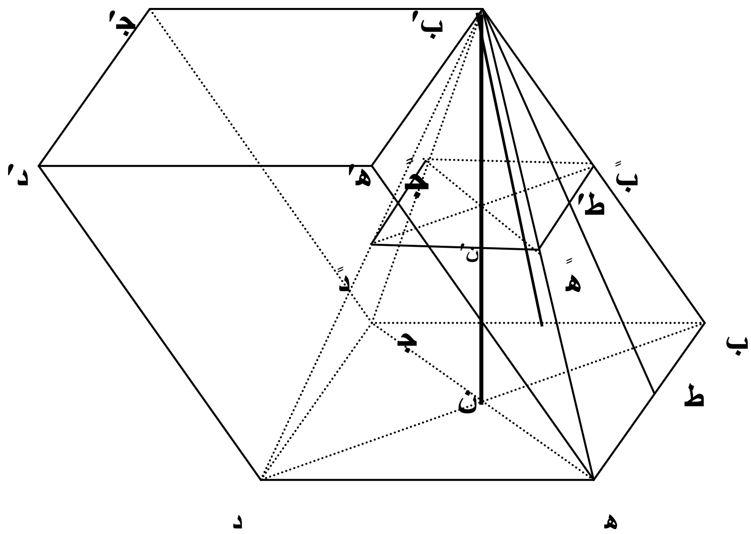
٥) ب جـ دهـ ، ب′جـ′د′هـ′ منشور مائل قاعدته ب جـ دهـ مستطيل | جـ د| = ٦سم | ب′ ب|= ١٣سم و مسقط ب′ على مستوي القاعدة هو ن نقطة تقاطع قطري القاعدة

المطلوب

١) احسب حجم المنشور و مساحته الكلية ومساحة المقطع القائم ؟
٢) احسب حجم الهرم الذي قاعدته ب جـ هـ د ورأسه ب′
٣) إذا قطع الهرم بمستوي يوازي القاعدة عين بعد هذا المستوي عن الرأس ب′ حتى تكون مساحة المقطع الناتج =١٢ سم^{٢} .

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

الحل



١) مساحة القاعدة ب جـ د هـ = |ب جـ| × |ب هـ| =٦×٨=٤٨ سم^٢

المثلث ب جـ د قائم الزاوية في جـ حسب فيثاغورث |ب د| = √(٣٦+٦٤) = ١٠ سم

⇐ |ب ن| = ٠,٥ × |ب د| =٥ سم

بما أن ب′ ن ⊥ مستوي (ب جـ د هـ) ⇐ فإن ب′ ن ب مثلث قائم في ن

حسب فيثاغورث نجد |ب′ ن |= √(١٦٩ - ٢٥) = ١٢ سم

حجم المنشور = ق× ع = ٤٨ × ١٢ = ٥٧٦ سم^٣ ،

|ب′ ب|=|ب′جـ| =|ب′د| = |ب′هـ|= ١٣ سم لأن ب′ ن محور المستطيل

المثلث ب′ ب هـ متساوي الضلعين [ب′ ط] ارتفاع ⇐ |ب′ط|= √(١٦٩-٩) = √١٦٠سم

المثلث ب′ ب جـ متساوي الضلعين [ب′ ط′] ارتفاع ⇐ |ب′ط′|= √(١٦٩-١٦) = √١٥٣سم

المساحة الكلية للمنشور =٢× مساحة الوجه (ب′ب هـ هـ′) + ٢× مساحة الوجه (ب′ب جـ جـ′) + ٢× مساحة القاعدة (ب جـ د هـ)

= ٢×٦× √١٦ +٢×٨× √١٥٣ + ٢×٦×٨ =٤٤٥,٦٩٨

حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × طول الحرف

٥٧٦ = مساحة المقطع القائم × ١٣ ⇐ مساحة المقطع القائم = $\frac{576}{13}$ سم^٢

٢) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ ×٤٨ ×١٢ = ١٩٦ سم^٣

٣) $\frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة القاعدة}}$ = $\left(\frac{|\text{ب`ن`}|}{|\text{ب`ن}|}\right)^٢$ ⇐ |ب′ن′|^٢=(١٢×١٤٤)÷٤٨=٣٦ ⇐ |ب′ ن′|= ٦ سم

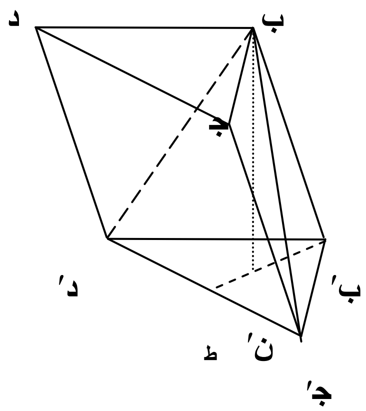
الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

٦) ب جـ د– ب′جـ′د′ منشور ثلاثي فيه وجهان جانبيان ب جـ جـ′ ب′ ، ب د د′ ب′ معينـــان طبوقـــان فيهمـا ب جـ جـ′ =٦٠° ن موقع العمود النازل من ب على القاعدة ب′جـ′ د′

المطلوب

1. **عين ن بطريقة هندسية**
2. **إذا كان |بجـ|=١٠سم ، |جـ د|=١٢سم احسب |ب ن|**
3. **حجم المنشور ثم استنتج مساحة مقطعه القائم ٠**

الحل



١) ب جـ جـ′ مثلث فيه : | ب جـ| = | جـ جـ′| (ضلعي معين) و كذلك ب جـ جـ′ =٦٠°

إذاً هو مثلث متساوي الأضلاع

بفرض | ب ب′| = س فيكون |ب جـ′| = |ب د′| = س

من ذلك نجد أن ب متساوية البعد عن (ب′ ، جـ′ ، د′)

و بالتالي هذه النقاط متساوية البعد عن مسقط ب على المستوي ب′ جـ′ د′ أي |ب′ ن| =|جـ′ ن| =|د′ ن|

إذاً ن مركز الدائرة المارة من روؤس المثلث ب′ جـ′ د′ وهي نقطة تلاقي محاور أضلاع هذا المثلث

٢) بفرض ط منتصف [جـ′ د′] ⇐

ب′ ط ⊥ جـ′ د′ لأن المثلث ب′ جـ′ د′ متساوي الساقين

|ب′ ط| = $\sqrt{(|ب′ جـ′|)^2 - (|جـ′ ط|)^2}$ = $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ٨ سم

مساحة المثلث ب′ جـ′ د′ = $\frac{1}{2}$ × |جـ′د′| × |ب′ ط|

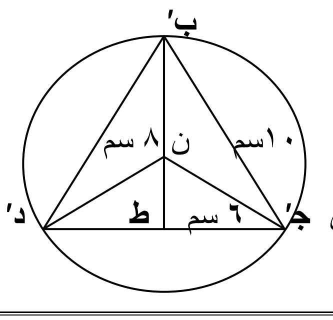
= $\frac{1}{2}$ ×١٢×٨ =٤٨ سم^2

لحساب |ب′ ن| نعلم أن ن مركز الدائرة المارة من روؤس المثلث ب′ جـ′ د′

جـ′ن د′ =٢ × جـ′ب′ د′ مركزية و محيطية جـ′ن ط = $\frac{1}{2}$ **جـ′ن د′**

لأن المثلث جـ′ ن د′ متساوي الضلعين |جـ′ ن| = |ن د′| = نق =|ب′ ن|

أي أن جـ′ن ط = جـ′ب′ د′ ⇐ جا(جـ′ن ط) = جا(جـ′ب′ د′) = جا٢ص



$\frac{6}{\text{نق}}$ = ٢× جاص × جتاص ⇐ $\frac{6}{\text{نق}}=2\times\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}$ ⇐

نق= |ب′ن| = $\frac{25}{4}$ سم =٨,٢٥ سم

إذاً |ب ن| = $\sqrt{(|\text{بجَ}|)^2-(|\text{ب′ن}|)^2}$ = $\sqrt{(١٠)^2-(٦,٢٥)^2}$ = $\sqrt{٦٠,٩٣٧٥}$ = ٧,٨سم

٣) حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨× ٧,٨ =٣٧٤,٤سم^3

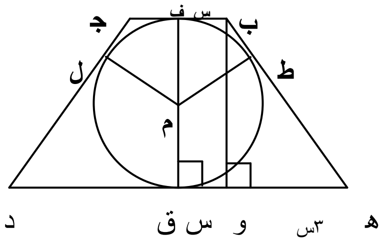
٣٧٤,٤ سم^3 = مساحة المقطع القائم × طول الحرف ⇐مساحة المقطع القائم =٣٧٤,٤÷ ١٠ = ٣٧,٤٤سم^2

٧) ب جـ د هـ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدته الصغرى [ب جـ] تساوي ربع القاعدة الكبرى [د هـ] ، د(م ، ٤) ماسة داخلاً أضلاع شبه المنحرف ،نقيم من م عموداً على مستوي شبه المنحرف |م ن| = ٨ سم ، المطلوب:

١) احسب أطوال أضلاع شبه المنحرف ٢) احسب حجم الهرم ن− ب جـ د هـ و احسب مساحته الكلية

٣)برهن أن م متساوية البعد عن الأوجه الجانبية للهرم

الحل



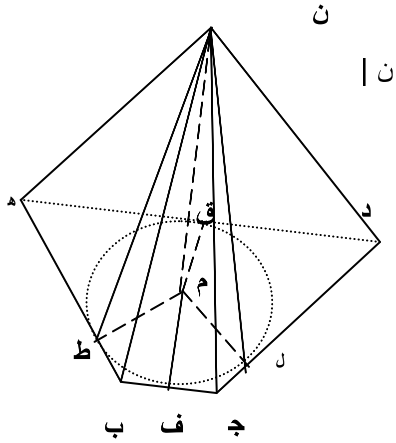
١) بفرض |ب جـ| = ٢ س ⇐ | ب ف| = س= | وق| حيث ب و // ف ق ، ف ق⊥ هـ د ، س > ٠ ،

|ب ف|=|ب ط|= س (ب ف ، ب ط مماسان من نقطة واحدة) ولنفس السبب |هـ ط|=|هـ ق|= ٤ س ⇐|هـ ب|=٥ س

من المعطى |ف ق|= | ب و|= ٨ سم لأنه قطر في الدائرة ، من المثلث ب و هـ نجد

(|ب و|)^2 = (| هـ ب|)^2- (|هـ و|)^2 ⇐ ٦٤= (٥ س)^2 – (٣س)^2 ⇐١٦س^2= ٦٤ ⇐ س= ٢

⇐|بجـ|= ٤ سم ، |هـ ب|= |جـ د|=١٠ سم ، |هـ د |= ١٦ سم



٢) حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ مساحة (ب جـ د هـ)× |م ن |

= $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right.$ × (|هـ د|+ | بجـ|) ×|ب و| $\left.\right)$ ×|م ن|

= $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ × (١٦+٤)× ٨× ٨= ٢١٣,٣٣ سم^3

بما أن م ن ⊥ مستوي الدائرة فإن |ن ط|=|ن ف|=|ن ق|= | ن ل |

و هذه ارتفاعات الأوجه الجانبية ومنه (| ن ل|)^2 =(| ن م|)^2 + (| م ل|)^2

=٦٤+١٦=٨٠ ⇐ |ن ل| = $\sqrt{٨٠}$ سم=٨,٩٤ سم

مساحة ن ب جـ = $\frac{1}{2}$ ×٤×٨,٩٤=١٧,٨٨ سم^2

مساحة ن ب هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٠× ٨,٩٤ =٤٤,٧ سم^2= مساحة ن جـ د

مساحة نهـ د = $\frac{1}{2}$ × ١٦ × ٨,٩٤ =٨١,٥٢ سم^2

المساحة كلية= المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = (١٧,٨٨+٢×٤٤,٧+٨١,٥٢)+٠,٥×(١٦+٤)×٨= ٢٥٦,٨ سم^2

٣) مما سبق وجدنا |ن ل|= |ن ط|= |ن ف|=|ن ق|

وكذلك |م ط|=|م ل|=|م ف|=|م ق| أنصاف أقطار

وكذلك المثلثات م ن ط ، م ن ل ، م ن ف ، م ن ق قائمة فهي إذاً متطابقة

الناشر الإلكتروني: مدارس الشمس الأهلية

و من ذلك نستنتج أن الارتفاعات النازلة من م على أوتار هذه المثلثات تكون متطابقة

نعلم أن د جـ ⊥ م ل ، د جـ ⊥ ن ل ⇐ د جـ ⊥ مستوي ن ل م ⇐ د جـ ⊥ ارتفاع المثلث ن م ل النازل من م

و لكن الارتفاع ⊥ ن ل ⇐ الارتفاع ⊥ المستوي ن د جـ إذاً الارتفاع هو بعد م عن الوجه ن د جـ

و بنفس الطريقة نثبت أن الارتفاعات الأخرى هي أبعاد م عن الأوجه النازلة عليها

وبما أنها متساوية نستنتج أن بعد م عن الأوجه الجانبية متساوي

٨)هرم منتظم م – ب جـ د هـ قاعدته ب جـ د هـ مربع طول ضلعه ٦سم و عامده ٥ سم والمطلوب

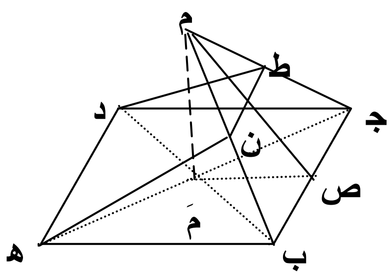
أ) احسب المساحة الكلية للهرم ، وحجمه

ب) بفرض ن منتصف الحرف [م ب] ، ط نقطة تقاطع مجـ مع المستوي ن هـ د

برهن أن الرباعي دهـ ن ط شبه منحرف متساوي الساقين

جـ) احسب المساحة الجانبية للهرم م ن هـ د ط

الحل



أ)المساحة الجانبية = ٠,٥× (٤ × ٦) × ٥ = ٦٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٦٠ + ٣٦=٩٦ سم^{٢}

لحساب حجم الهرم يلزم حساب الارتفاع م مَ ،

من المثلث م مَ ص القائم الزاوية نجد |م مَ| = $\sqrt{٢٥-٩}$ =٤سم، إذاً حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × ٣٦ ×٤ = ٤٨سم^{٣}

ب)(هـ د// ب جـ ⊂ المستوي م ب جـ) ⇐هـ د // المستوي م ب جـ ،

المستوي ن هـ د يحوي هـ د ويقطع المستوي م ب جـ وفق الحد المشترك ن ط

فيكون ن ط//هـ د فيكون الرباعي هـ د ط ن شبه منحرف

(إذ أن | ط ن| < | ب جـ| وبالتالي | ط ن| < | د هـ| فالرباعي ليس متوازي أضلاع)

ولإثبات أن | هـ ن| =| د ط|

نلاحظ أنهما خطان متوسطان في مثلثين متطابقين هـ ب م ، د جـ م فشبه المنحرف متساوي الساقين ٠

جـ) لحساب المساحة الجانبية للهرم م نهـ د ط علينا حساب مساحة كل وجه على حدة :

مساحة الوجه م ن هـ = مساحة الوجه م ط د = ٠,٥ مساحة الوجه م جـ د لأن د ط ، ن هـ متوسطان

مساحة م جـ د = مساحة مجـ ب = ٠,٥ × ٦×٥ = ١٥ سم^2 ،

مساحة م ن هـ = ٠,٥ × ١٥ =٧,٥ سم^2 ،

| ط ن| = ٠,٥ |جـ ب|

(القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث و طولها يساوي نصف طول الضلع الثالث) و

كذلك طول ارتفاع المثلث م ط ن يساوي نصف طول ارتفاع المثلث م ب جـ ،

أي مساحة م ط ن = ٠,٥×٣ × ٢,٥ = ٣,٧٥ سم^2

مساحة م هـ د = ٠,٥ × ٦ ×٥=١٥ سم^2

المساحة الجانبية للهرم م ط ن هـ د = ٧,٥+٧,٥+٣,٧٥+١٥ =٣٣,٧٥ سم^2

٩) ب جـ د مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ك ٠ رسمنا من ب عموداً [ب م] على مستوي المثلث طوله ٤ك فتعين الهرم م ب جـ د ٠ فإذا قطعنا هذا الهرم بمستو مواز للقاعدة ب جـ د يبعد عن م بمقدار **س** و عددنا المقطع
ب′ جـ′د′ قاعدة الموشور حرفه ب ب′ المطلوب :

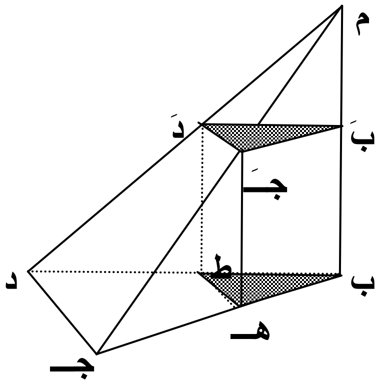
١- احسب مساحة المثلث ب′جـ′ د′

٢- احسب س بدلالة ك ليكون حجم الموشور السابق أكبر ما يمكن

٣- أوجد نسبة حجم الموشور الأعظمي إلى حجم الهرم

الحل

١) مساحة ب جـ د = ك٢ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، و نعلم أن $\frac{\text{مساحة ب َجَ دَ}}{\text{مساحة ب جـ د}} = (\frac{\text{س}}{4\text{ك}})^2$



مساحة ب′ج′ د′ = $\frac{\text{ك}^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{\text{س}^2}{16\text{ك}^2} = \frac{\text{س}^2\sqrt{3}}{64}$

٢) ارتفاع الموشور ب′ ج′ د′   ب هـ ط هو |ب ب′| = ٤ك − س

حجم الموشور = $\frac{\text{س}^2\sqrt{3}}{64}$ × (٤ك − س) ⇐

ح= − $\frac{\sqrt{3}}{64}$ س٣ + $\frac{\sqrt{3}}{16}$ ك س٢   س ∍] ٠ ، ٤ك [

ح′= − $\frac{3\sqrt{3}}{64}$ س٢ + $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ك س ،

ح′=٠ ⇐ س=٠ ∌]٠ ، ٤ك[

أو س= $\frac{8}{3}$ ك ∍]٠، ٤ك[

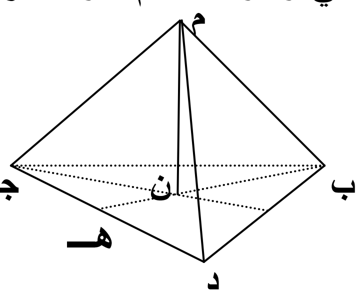
س		٠	$\frac{8}{3}$ ك	٤ك
ح′		+ + +	٠	− −
ح		↗		↘

الحجم الأعظمي ح = − ٨× $\frac{\sqrt{3}}{27}$ ك٣ + $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ ك٣= $\frac{4\sqrt{3}}{27}$ ك٣

حجم الهرم م ب جـ د = $\frac{\text{ك}^2\sqrt{3}}{3\times4}$ × ٤ ك= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ك٣

⇐ $\frac{\text{حجم المنشور}}{\text{حجم الهرم}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}\text{ك}^3}{27}}{\frac{\sqrt{3}\text{ك}^3}{3}} = \frac{4}{9}$

١٠) رباعي وجوه منتظم طول حرفه ٤ سم احسب حجمه ومساحته الكلية ٠



الحل

المساحة الكلية = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد

= ٤ × $\frac{16\sqrt{3}}{4}$ =١٦$\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

|ب ن| = $\frac{2}{3}$ × |ب هـ| = $\frac{2}{3}$ $\sqrt{(|\text{ب د}|)^٢ - (|\text{د هـ}|)^٢}$

= $\frac{2}{3}$ $\sqrt{١٦-٤}$ = $\frac{2}{3}$ × $\sqrt{١٢}$ حيث هـ منتصف [د جـ] و ب هـ ⊥ دجـ

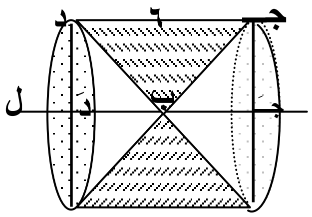
|م ن|= $\sqrt{(|\text{م ب}|)^٢ - (|\text{ب ن}|)^٢}$ = $\sqrt{١٦ - \frac{4}{9}\times12}$ =4× $\sqrt{\frac{2}{3}}$

الحجم = $\frac{1}{3}$ مساحة ب د جـ × |م ن| = $\frac{1}{3}$ × $\frac{16\sqrt{3}}{4}$ ×4× $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ = $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ وحدة مكعبة

١١) مثلث ب جـ د متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم و المستقيم ل يمر من ب و يوازي جـ د ،

احسب مساحة و حجم المجسم المتولد عن دوران المثلث ب جـ د حول ل ٠

الحل



إن المجسم الناتج من الدوران هو اسطوانة مصمتة مفرغ منها مخروطان متطابقان

مولد الإسطوانة هو ارتفاعها= | جـ د| = ٦ سم ، نصف قطرها =|جـ جَ|= ٦× جا٦٠° = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

مولد المخروط= | ب جـ| =٦ سم ، ارتفاع المخروط =|ب جَ| =٦ ×جتا ٦٠° =٣سم

نصف قطر قاعدة المخروط =| جـ جَ| =٣ $\sqrt{٣}$ سم ،

مساحة المجسم = المساحة الجانبية للأسطوانة + المساحة الجانبية للمخروطين

= ٢ط×| جـ جَ| ×|جـ د| + ٢ط × |جـ جَ| × |ب جـ|

=٢ط×٣$\sqrt{٣}$ × ٦ + ٢ط ×٣$\sqrt{٣}$ × ٦

= ٧٢ط $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

حجم المجسم = حجم الأسطوانة – حجم المخروطين

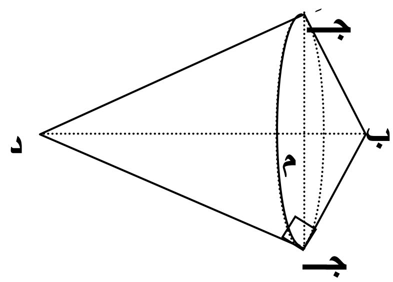
= ط ×(|جـ جَ|)^{٢} × |د جـ| – ٢× $\frac{ط}{3}$× (|جـ جَ|)^{٢} × |بجَ|

= ط×(٣$\sqrt{٣}$)^{٢} × ٦ – ٢× $\frac{ط}{3}$ (٣ $\sqrt{٣}$)^{٢} × ٣ =٣٢٤ ط سم^{٣}

---

١٢) مثلث ب جـ د قائم الزاوية في جـ ،|ب جـ |= ٣ سم ، |جـ د|=٤سم ،ندور هذا المثلث حول ب د دورة كاملة ، المطلوب حساب مساحة وحجم المجسم المتولد من هذا الدوران ٠

الحل



م المسقط القائم للرأس جـ على الوتر [ب د] المجسم هو اجتماع مخروطين مشتركين بالقاعدة التي مركزها م و نصف قطرها |جـ م| ،

|ب د|= ٥ سم حسب نظرية فيثاغورث ، من المثلث القائم ب جـ د نجد |جـ م | × | ب د| = |ب جـ|× |جـ د|

أي |جـ م| = $\frac{12}{5}$ سم ،

مساحة المجسم = مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

= ط ×| جـ م| × |ب جـ| + ط× |جـ م| × |جـ د|= ط× $\frac{12}{5}$ ×٣+ ط× $\frac{12}{5}$ × ٤= $\frac{84}{5}$ ط سم٢

حجم المجسم = مجموع حجمي المخروطين

= $\frac{1}{3}$ ط ×(|جـ م|)٢× |م ب| + $\frac{1}{3}$ ط ×(|جـ م|)٢ ×|م د|

= $\frac{1}{3}$ ط×(|جـ م|)٢×(|م ب| +|م د|)= $\frac{1}{3}$ ط×($\frac{12}{5}$)٢ ×(٥)= $\frac{48}{5}$ ط سم٣

١٣) ب جـ د هـ مربع طول ضلعه ك ، ب د ، جـ هـ قطران نرسم ربع دائرة مركزها هـ مماسة لـ [ب جـ] و [جـ د]، يقطع قوسها القطر [جـ هـ] في ن ندور الشكل حول [ب هـ] دورة كاملة ، احسب بدلالة ك ما يلي :

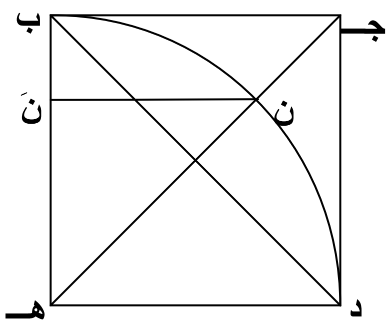
١- حم١ الحجم المتولد من دوران القوس $\overset{\frown}{بد}$

٢- حم٢ الحجم المتولد من دوران المربع ب جـ د هـ

٣- حم٣ الحجم المتولد من دوران المثلث ب هـ د

٤- حم٤ الحجم المتولد من دوران القوس $\overset{\frown}{بن}$

الحل



١) حم١ = $\frac{1}{2}$ حجم الكرةالتي مركزها هـ ونصف قطرها ك=|ب جـ|

= $\frac{1}{2}$ × $\frac{4}{3}$ × ط × ك٣ = $\frac{2}{3}$ ط ك٣

٢) حم٢ = حجم إسطوانة دورانية ارتفاعها ك و نصف قطرها ك

= ط نق ٢ ×ع

= ط ك٢× ك = ط ك٣

٣) حم٣ = حجم مخروط دوراني قائم ارتفاعه ك ونصف قطر قاعدته ك

= $\frac{1}{3}$ ط × نق٢ ×ع = $\frac{1}{3}$ ط ك٢ × ك = $\frac{1}{3}$ ط ك٣

٤) نرسم من ن على [ب هـ] ارتفاع فيقطعه في نَ

نلاحظ أن المثلث ب هـ جـ ، والمثلث هـ ن نَ متشابهان لأن

$\hat{ن} = \hat{جـ}$ متناظرتان ، والزاوية هـ مشتركة

و كذلك حسب فيثاغورث | جـ هـ| = $\sqrt{٢}$ ك = ١,٤ ك ، من التشابه نجد

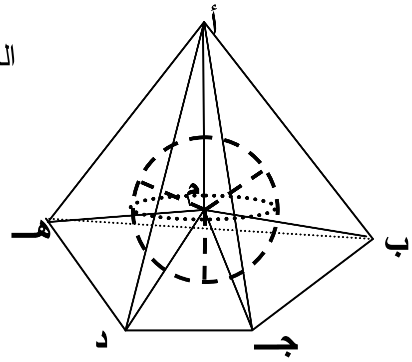
$\frac{|هـ ن|}{|هـ ب|} = \frac{|هـ ن`|}{|هـ جـ|} \Leftrightarrow \frac{ك}{1.4ك} = \frac{|هـ ن`|}{ك} \Leftrightarrow$ |هـ ن′| =٠,٧١ ك

إذا |ب ن′|= ك- ٠,٧١ ك = ٠,٢٩ ك حم٤ =حجم القبة الكروية ارتفاعها = |ب ن′| = ٠,٢٩ ك

= $\frac{1}{3}$ ط ع٢ (٣نق-ع)= $\frac{1}{3}$ ط× ٠,٠٨٤١ك٢× (٣ك- ٠,٢٩ك) =٠,٠٧٦ك٣

١٤) بين أن نصف قطر الكرة الماسة لقاعدة هرم ولجميع وجوهه الجانبية (من الداخل) هو $\frac{3ح}{سط}$ حيث (ح حجم الهرم ، سط مساحة السطح الكلي للهرم) ٠

الحل



نصل مركز الكرة بجميع رؤوس الهرم فيتشكل لدينا أهرام صغيرة قاعداتها هي أوجه الهرم (الجانبية والقاعدة) و تكون ارتفاعاتها متساوية و كل منها نصف قطر الكرة

على ما تقدم فإن مجموع حجوم الأهرامات الصغيرة = حجم الهرم الكبير

أي $\frac{1}{3}$ نق سط١+ $\frac{1}{3}$ نق سط٢+ $\frac{1}{3}$ نق سط٣+ $\frac{1}{3}$ نق سط٤+.................................+ $\frac{1}{3}$ نق سطن= حجم الهرم الكبير=ح

$\frac{1}{3}$ نق(سط١+ سط٢+ سط٣+ سط٤+.................................+ سطن) = ح $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}$ نق سط = ح $\Leftarrow$ نق= $\frac{3ح}{سط}$

مسائل للطالب

١) ب جـ د مثلث قائم الزاوية في جـ طول وتره= ١٠ وطول ضلعه [بجـ] يساوي ٨ ، رسمنا من هـ منتصف [ب د] عموداً على المثلث وعينا عليه النقطة ن حيث يكون | هـ ن| =١٢ المطلوب

أ) عين مركز الكرة المارة من رؤوس الهرم ن ب جـ د ، ثم احسب طول نصف قطرها

ب) احسب حجم ومساحة القبة الكروية الصغرى التي يحددها المستوي ب جـ د على الكرة المارة من رؤوس الهرم ن ب جـ د .

الأجوبة المركز م يقع على [ن هـ] إن م ا= $\frac{169}{24}$ = نق، حجم القبة = $\frac{285625\text{ط}}{10368}$ وحدة حجم ، مساحة القبة= $\frac{4225\text{ط}}{144}$ وحدة مساحة

---

٢) ب جـ د مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ك ، فإذا كانت د الدائرة المارة برؤوس المثلث ودورنا الشكل حول قطر الدائرة المارة من ب فإننا نحصل على كرة في داخلها مخروط (محيط قاعدته و رأسه على السطح الكروي)

أ) احسب نصف قطر الكرة بدلالة ك و استنتج مساحتها و حجمها .

ب) نرسم مستوياً ي يوازي قاعدة المخروط ويبعد عن رأسه ب مسافة س ولتكن $د_1$ الدائرة التي يعينها المستوي ي على الكرة و $د_2$ الدائرة التي يعينها على المخروط ،

١) احسب س بدلالة ك حتى يكون الفرق بين مساحتي $د_1$، $د_2$ مساوياً مساحة قاعدة المخروط

٢) احسب في الحالة السابقة مساحة وحجم القبة الكروية الصغرى التي قاعدتها $د_1$.

الأجوبة نصف قطر الكرة = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ك ، مساحة سطحها= $\frac{4\text{ط ك}^2}{3}$ ، حجمها = $\frac{4\text{ط ك}^3\sqrt{3}}{27}$

س = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، مساحة القبة $\frac{\text{ط}}{2}$ ك^2 ، حجم القبة = $\frac{3\text{ط}\sqrt{3}}{64}$ ك^2