3-1 الأعداد المركبة

الأعداد التخيلية البحتة: قادت المعادلات كالمعادلة السابقة الرياضيين إلى تعريف **الأعداد التخيلية**، وتعرف **الوحدة التخيلية** i على أنها الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 ، وبعبارة أخرى فإن : $i^2 = -1$ أو $i = \sqrt{-1}$

مثال (1) بسط كلا مما يأتي :

(1) $\sqrt{-18}$	(2) $\sqrt{-125}$

نشاط : بسط كلا مما يأتي :

(1) $\sqrt{-32}$	(2) $\sqrt{-27}$

$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^2 = -1$	$i^1 = i$
$i^8 = (i^2)^4 = 1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$

مثال (2) بسط كلا مما يأتي :

(1) $3i \, . \, 4i$	(2) i^{31}	(3) $\sqrt{-20} \, . \, \sqrt{-12}$

نشاط : بسط كلا مما يأتي :

(1) i^{63}	(2) $3\sqrt{-24}\ .\ \sqrt{-18}$

مثال (3) حل كل معادلة مما يأتي :

(1) $4x^2+100=0$	(2) $x^2+4=0$

نشاط : حل المعادلة التالية :

(1) $4x^2+32=0$

تعريف

التعبير اللفظي: العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته على الصورة $a + b\boldsymbol{i}$ ؛ حيث a و b عددان حقيقيان، $\boldsymbol{i}$ الوحدة التخيلية، ويسمى a الجزء الحقيقي، و b الجزء التخيلي.

مثالان: $5 + 2\boldsymbol{i}$ $\quad$ $1 - 3\boldsymbol{i} = 1 + (-3)\boldsymbol{i}$

مثال (4): أوجد قيمة x , y اللتين تجعلان المعادلة التالية صحيحة :

$$5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$$

نشاط : أوجد قيمة a , b اللتين تجعلان المعادلة التالية صحيحة :

$$3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$$

مثال (5) : بسط كلا مما يأتي : (جمع الأعداد المركبة وطرحها)

(1) $(-2+5i)+(1-7i)$	(2) $(4+6i)-(-1+2i)$

نشاط : بسط كلا مما يأتي :

(1) $(-1+5i)+(-2-3i)$	(2) $(7+4i)-(1+2i)$

مثال (6) : بسط كلا مما يأتي : (ضرب الأعداد المركبة)

$(6-8i).(9+2i)$

نشاط : بسط كلا مما يأتي :

$(3+2i).(-2+4i)$

ملاحظة: يسمى العددان المركبان : $a - bi \ , \ a + bi$ مترافقين .

مثال (7) أوجد المرافق للأعداد المركبة التالية :

العدد	المرافق
$(3 - 2i)$	
$(5i + 8)$	
$(-13i)$	
(-7)	

مثال (8) بسط كلا مما يأتي :

(1) $\frac{-2i}{3+5i}$
(2) $\frac{2+i}{1-i}$
(3) $\frac{3-i}{4+2i}$

3-2 القانون العام والمميز

القانون العام لحل المعادلة التربيعية :

التعبير اللفظي: يمكن حل المعادلة التربيعية المكتوبة على الصورة: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ باستعمال القانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$

مثال (9) : حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

(1) معادلة لها جذران نسبيان :

$x^2 + 6x = 16$

(2) معادلة لها جذر نسبي واحد :

$x^2 - 16x + 64 = 0$

الجذور غير النسبية **(3)**

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

الجذور المركبة **(4)**

$$3x^2 + 5x + 4 = 0$$

نشاط : حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام :

(1)معادلة لها جذران نسبيان:

$$2x^2 + 25x + 33 = 0$$

(2)معادلة لها جذر نسبي واحد :

$$x^2 + 34x + 289 = 0$$

(3)الجذور غير النسبية :

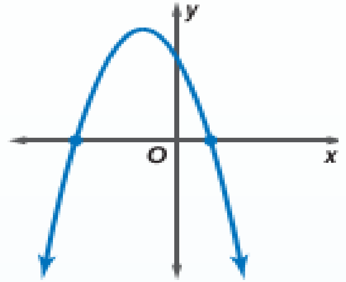
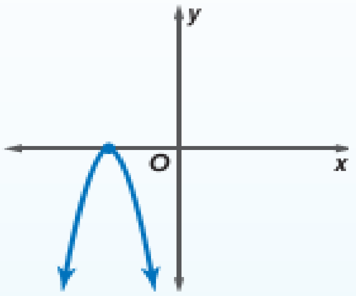
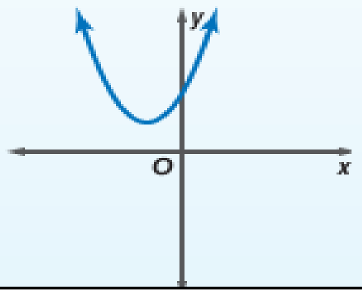
$$x^2 - 8x + 9 = 0$$

(4)الجذور المركبة :

$$x^2 - 4x = -13$$

المميـز

في المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث a,b,c أعداد نسبية، $a \neq 0$.

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها	مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ مربع كامل .	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$ ، والعبارة $b^2 - 4ac$ ليست مربعًا كاملًا.	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي واحد	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال : (10) أوجد المميز لكل من المعادلات التالية وحدد نوع الجذور :

(1) $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

(2) $-7x + 15x^2 - 4 = 0$	

نشاط : أوجد المميز لكل من المعادلات التالية وحدد نوع الجذور :

(1) $3x^2 + 8x + 2 = 0$	
(2) $2x^2 - 6x + 9 = 0$	

ملاحظة هامة :

كتابة المعادلة التربيعية إذا علم جذراها r_1 , r_2 :

$$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضربهما}) = 0$$

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + (r_1 . r_2) = 0$$

مثال (11) : أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها : -7 , 2 .

مثال (12) : **أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها :** $7 \pm 3i$

3-3 العمليات على كثيرة الحدود

خصائص الأسس

لأي عددين حقيقيين x , y وعددين صحيحين b , a يكون :

الخاصية	التعريف
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ ، حيث $x \neq 0$
الأسّ السالب	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $\frac{1}{x^{-a}} = x^a$ ، حيث $x \neq 0$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$
تبسيط وحيدات الحد	تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما: • لا تتضمن قوى القوة. • يظهر كل أساس مرة واحدة. • تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة. • لا تتضمن أسسًا سالبة.

مثال (13) : بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

(1)

$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$

(2)

$\dfrac{15c^5d^3}{-3c^2d^7}$

(3)

$\left(\dfrac{a}{4}\right)^{-3}$

(4)

$(-2x^3y^2)^5$

نشاط : بسّط كل عبارة فيما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

(1)

$(2a^3b^{-2})(-4a^2b^4)$

(2)

$\dfrac{12x^4y^2}{2xy^5}$

(3)

$\left(\dfrac{2a^2}{3b}\right)^3$

(4)

$(6g^5h^{-4})^3$

مثال (14) : بسط العبارات التالية:

(1)
$(-x^2 - 3x + 4) - (x^2 + 2x + 5)$

(2)
$(3x^2 - 6) + (-x + 1)$

(3)
$\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$

(4)
$-2a(-3a^2 - 11a + 20)$

(5) $(x^2 + 4x + 16)(x - 4)$

(6) $(2x^2 - 4x + 5)(3x - 1)$

3 - 4 قسمة كثيرات الحدود

مثال (15) : بسط كل مقدار فيما يأتي :

(1)

$$(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$$

(2)

$$(18x^2y + 27x^3y^2z)(3xy)^{-1}$$

نشاط : بسط المقدار التالي :

$$\frac{4xy^2 - 2xy + 2x^2y}{xy}$$

مثال (16) : استعمل القسمة الطويلة لإيجاد الناتج في كل مما يأتي :

(1) $(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3)$

(2) $(x^2 - 13x + 12) \div (x - 1)$

نشاط : أي مما يأتي يكافئ العبارة :

$$(r^2 + 5r + 7)(1 - r)^{-1}$$

A) $-r - 6 + \frac{13}{1-r}$ B) $r - 6 + \frac{13}{1-r}$ C) $r + 6$ D) $r + 6 - \frac{13}{1-r}$

القسمة التركيبية

الخطوة 1: اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا بحسب درجتها. تأكد من أن المقسوم عليه على الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2: اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الثاني.

الخطوة 3: اجمع ناتج الضرب مع المعامل الثاني.

الخطوة 4: كرر الخطوتين 3 , 2 حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير. الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مثال (17) استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي :

(1) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

(2) $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14) \div (b - 2)$

نشاط : استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي :

(1) $(3x^3 - 8x^2 + 11x - 14) \div (x - 2)$

(2) $(4a^4 + 2a^2 - 4a + 12) \div (a + 2)$

مثال (18) استعمل القسمة التركيبية لتجد ناتج القسمة في كل مما يأتي :

$(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

3 - 5 دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود بمتغير واحد :هي عبارة جبرية علي الصورة : حيث n عدد صحيح غير سالب :

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ، حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية ، $a_n \neq 0$

درجة كثيرة الحدود : هي أس المتغير ذي أكبر أس فيها .

المعامل الرئيسي : هو معامل الحد الذي يحتوي المتغير ذي أكبر أس فيها .

مثال (19)

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود بمتغير واحد فيما يأتي، وإذا لم تكن كثيرة حدود بمتغير واحد، فاذكر السبب:

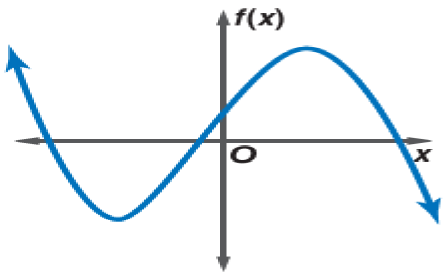
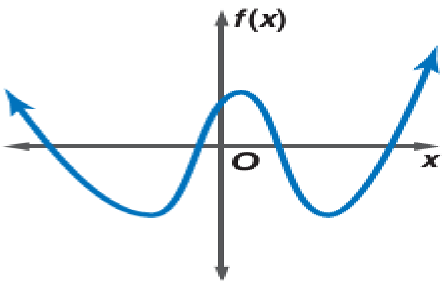
(1) $5x^6 - 3x^4 + 12x^3 - 14$
(2) $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$
(3) $8x^5 - 3x^2 + 4xy - 5$
(4) $8x^4 - 2x^3 - x^6 + 3$

مثال (20) : إذا كانت $g(x) = x^2 - 5x + 8$، فأوجد $g(5a - 2) + 3g(2a)$.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانيا :

مثال (21):

- صف سلوك طرفي التمثيل البياني .
- حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أم زوجية.
- اذكر عدد أصفار الدالة المنتمية لمجموعة الأعداد الحقيقية.

(1)	(2)
	

3 - 6 حل معادلات كثيرات الحدود

طرائق التحليل

عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدّان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$ $= (a+b)(x+y)$

مثال &نشاط (22): حل كثيرات الحدود التالية ،وإذا لم يكن ذلك ممكناً فاكتب كثيرة الحدود أولية :

(1) $2x^3 + 5y^3$

(2) $x^5 - 16x$

(3) $5y^4 - 320yz^3$

(4) $a^6 + b^6$

(5) $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

(6) $13ax + 18bz - 15by - 14az - 32bx + 9ay$

(7) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 + x^2y^3 + 4xy^3 + 4y^3$

مثال (23) : اكتب العبارتين الآتيتين على الصورة التربيعية إذا أمكن ذلك :

(1)	$x^4 + 5x + 6$
(2)	$8x^4 + 12x^2 + 18$

مثال(24) حل المعادلات التالية :

(1)	$x^3 + 27 = 0$
(2)	$x^4 + x^2 - 90 = 0$
(3)	**(باستعمال الصورة التربيعية)** $4x^4 - 8x^2 + 3 = 0$

3 - 7 نظريتا الباقي والعامل

نظرية الباقي

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

المقسوم		ناتج القسمة		المقسوم عليه		الباقي
$P(x)$	$=$	$Q(x)$	$\bullet$	$(x - r)$	$+$	$P(r)$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

مثال (25) : باستعمال طريقة التعويض التركيبي وطريقة التعويض المباشر لإيجاد $f(3)$:

$$f(x) = 3x^3 - 6x^2 + x - 11$$

نشاط : باستعمال طريقة التعويض التركيبي وطريقة التعويض المباشر لإيجاد $f(4)$:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 14$$

نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

مثال (26) :

بيّن أن $x - 2$ عامل من عوامل كثيرة الحدود: $x^3 - 7x^2 + 4x + 12$، ثم أوجد عواملها الأخرى.

3 - 8 الجذور والأصفار

الأصفار والعوامل، والجذور والمقاطع

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود، فإن العبارات الآتية متكافئة:

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًا، فإن $(c, 0)$ هو المقطع x لتمثيل الدالة $P(x)$.

مثال (27) : حل كل معادلة مما يأتي واذكر عدد جذورها وأنواعها (حقيقية أو مركبة):

(1) $x^3 + 2x = 0$

(2) $3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

التعبير اللفظي: يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المنتمية لمجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

مثال:

$x^3 + 2x^2 + 6$	$4x^4 - 3x^3 + 5x - 6$	$-2x^5 - 3x^2 + 8$
3 جذور	4 جذور	5 جذور

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

التعبير اللفظي: إذا كان a , b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ ، و كان $a + b\boldsymbol{i}$ صفرًا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية. فإن $a - b\boldsymbol{i}$ صفر للدالة أيضًا.

مثال (28) : اكتب دالة كثيرة حدود أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة ،إذا كانت العددان $-4 , 4 + \boldsymbol{i}$.

3 - 9 نظرية الصفر النسبي

التعبير اللفظي: إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدها الثابت لا يساوي صفرًا، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

مثال (29) :اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

$$g(x) = 3x^3 - 4x + 10$$

نشاط : اكتب جميع الأعداد النسبية التي تحددها نظرية الصفر النسبي للدالة التالية :

$$h(x) = x^3 + 11x^2 + 24$$