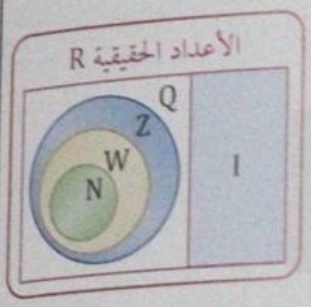
الفصل الأول: تحليل الدوال

الأعداد الحقيقية R

المجموعات الجزئية من R

الرمز	المجموعات	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3}, \sqrt{5}$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 7, 18$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3, \ldots$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, \ldots$



الصفة المميزة: الصفة المميزة للمجموعة تستعمل لتعريف خصائص الأعداد ضمن المجموعة

مثال توضيحي: عبِّر عن الأعداد 2, 3, 4, 5, 6 بالصفة المميزة.

$\{x|2 \le x \le 6, x \in W\}$

الفترات

استعمالها: وصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

التعبير الرمزي

الرمزان [أو]	الرمزان (أو)	الرمزان $-\infty$ أو ∞
طرف الفترة ينتمي إليها	طرف الفترة لا ينتمي إليها	الفترة غير محدودة

نوعاها

فترات محدودة	$a \le x \le b$	$a < x < b$	$a \le x < b$	$a < x \le b$
	$[a, b]$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$

فترات غير محدودة	$x \ge a$	$x \le a$	$x > a$	$x \ge a$	$-\infty < x < \infty$
	$[a, \infty)$	$(-\infty, a]$	(a, ∞)	$[a, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

مثال توضيحي: اكتب المجموعة $-4 \le y < -1$ باستعمال رمز الفترة.

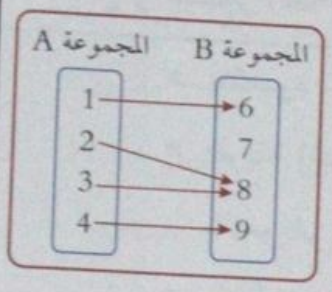
$[-4, -1)$

الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من المجموعة A إلى المجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B

مثال توضيحي

في الشكل المجاور العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثلة في المخطط السهمي المجاور تمثل **دالة**.



- تمثل المجموعة A مجال الدالة ورمزه D ..

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

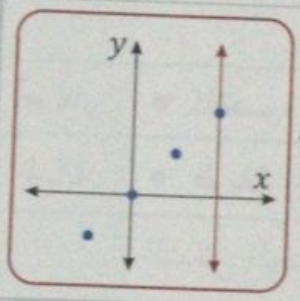
- تتضمن المجموعة B مدى الدالة ورمزه R ..

$R = \{6, 8, 9\}$

اختبار الدالة

اختبار جدولة	اختبار الخط الرأسي
يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين	تُعرَّف الدالة هندسيًا إذا كان لا يمكن لنقطتين منها أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي
مثال توضيحي: في الجدول ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y .. ∴ العلاقة دالة	**مثال توضيحي:** الخط الرأسي في الشكل لم يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة .. ∴ مجموعة النقاط تمثل دالة

x	y
-1	5
	7
1	9



مثال توضيحي

إذا كانت $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1}$ فأوجد قيمة $f(12)$.

$$f(12) = \frac{2x+3}{x^2-2x+1} = \frac{2(12)+3}{(12)^2-2(12)+1} = \frac{27}{121}$$

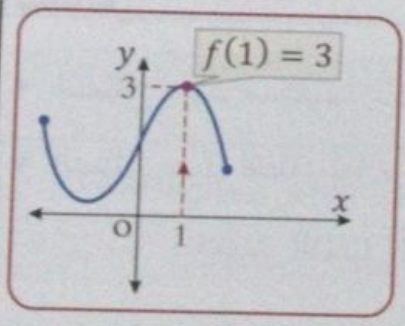
تحليل التمثيل البياني للدالة

المقصود به: تقدير قيم الدالة وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها مع محوري x , y وأصفارها

قيمة الدالة عند نقطة

- **المقصود بها:** طول العمود الواصل من النقطة على محور x إلى منحنى الدالة.
- **مثال توضيحي:** من الشكل المقابل لإيجاد قيمة الدالة عند $x = 1$ نجد أن ..

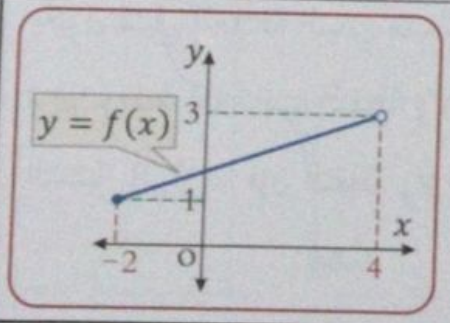
$f(1) = 3$



مجال ومدى الدالة

- **المجال:** نستعمل القيم على محور x لتحديد مجال الدالة.
- **المدى:** نستعمل القيم على محور y لتحديد مدى الدالة.
- **مثال توضيحي:** في الرسم المجاور ..

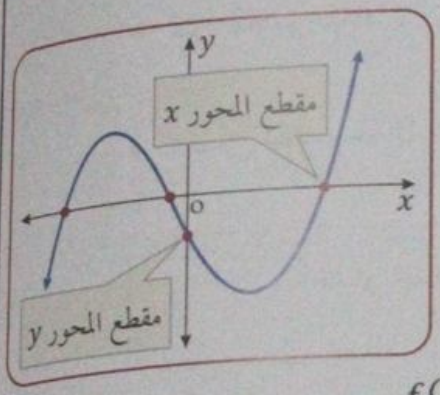
المجال هو $[-2, 4)$ ، **المدى هو** $(1, 3]$



المقاطع وأصفار الدالة

المقاطع

- **المقصود بها:** النقاط التي يتقاطع عندها منحنى الدالة مع المحور x أو المحور y .
- **طريقة إيجادها جبريًا:** يمكن الحصول على المقطع x بالتعويض $y = 0$ ، ولإيجاد المقطع y نُوجد $f(0)$.
- **مثال توضيحي:** إيجاد المقطع x والمقطع y للدالة $f(x) = 3x + 5$ ..



لإيجاد المقطع y نُوجد $f(0)$ ..

$$f(0) = 3(0) + 5 = 5$$

ولإيجاد المقطع x نعوض عن $y = f(x) = 0$ ، أي نساوي الدالة بالصفر ..

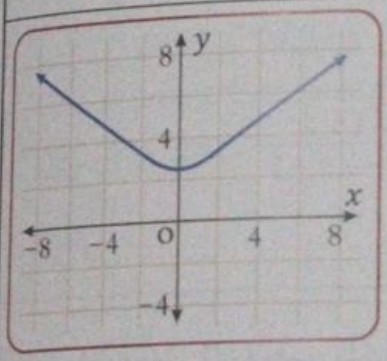
$$3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

أصفار الدالة

- **المقصود بها:** نقاط تقاطع الدالة مع محور x .
- **طريقة إيجادها:** نستعمل التمثيل البياني أو الحل الجبري لإيجاد أصفاره الدالة.

مثال توضيحي

الشكل المجاور يُبين التمثيل البياني للدالة $h(x) = \sqrt{x^2+6}$ ؛ أوجد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبريًا.



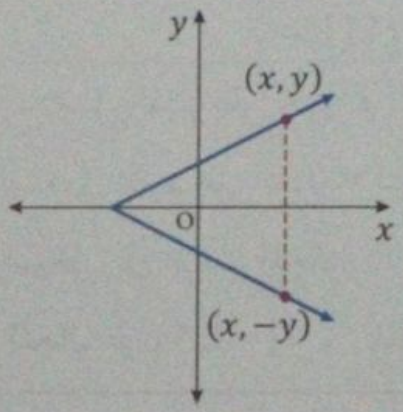
بما أن المقطع y هو النقطة التي يتقاطع عندها منحنى الدالة مع المحور y فإن القيمة التقريبية للمقطع $y \approx 2.4$.

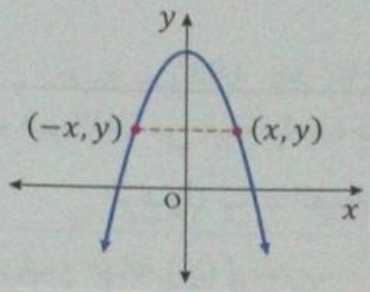
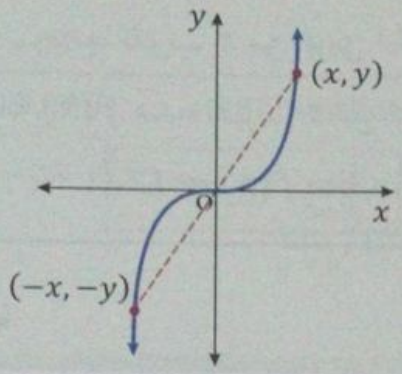
نُوجد القيمة التقريبية للمقطع y جبريًا بالتعويض عن $x = 0$ ..

$$h(0) = \sqrt{(0)^2+6} \approx 2.4$$

التماثل

- **التماثل حول مستقيم:** يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى.
- **التماثل حول نقطة:** إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير.

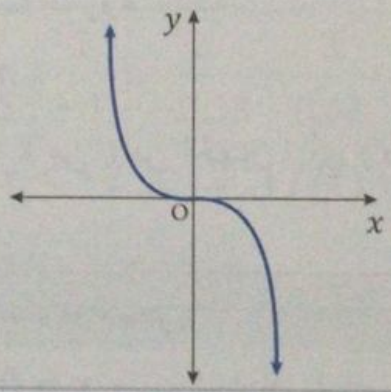
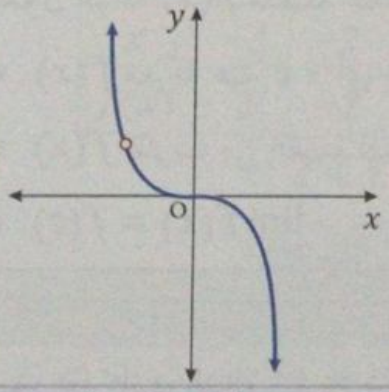
اختبار التمثيل البياني	النموذج	جبريًا
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة

يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة

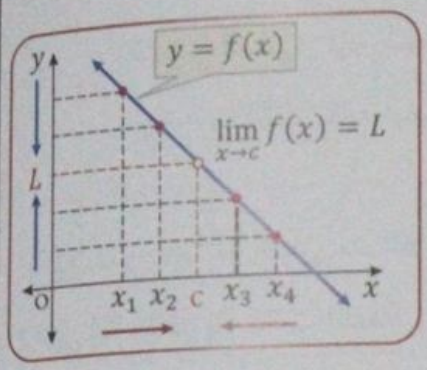
الدوال الزوجية والدوال الفردية

الدالة الزوجية	• المقصود بها: الدوال المتماثلة حول المحور y . • الاختبار الجبري: لكل x في مجال $f(x)$ يكون $f(-x) = f(x)$. • مثال توضيحي: لإثبات أن الدالة $f(x) = x^2$ زوجية .. $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ⇐ الدالة زوجية
الدالة الفردية	• المقصود بها: الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل. • الاختبار الجبري: لكل x في مجال $f(x)$ يكون $f(-x) = -f(x)$. • مثال توضيحي: لإثبات أن الدالة $f(x) = x^3$ فردية .. $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ⇐ الدالة فردية

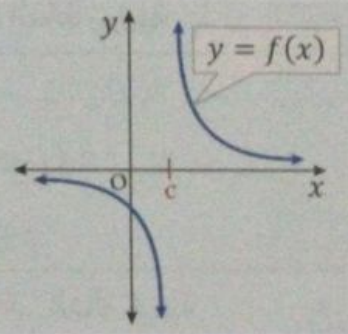
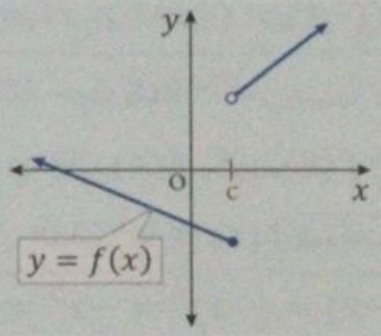
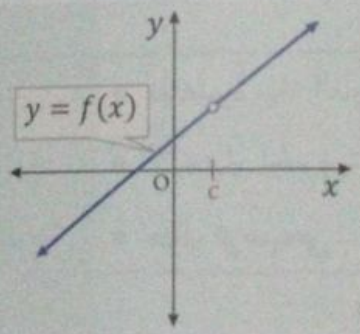
اتصال الدالة

المقصود به	عدم وجود أي انقطاع أو قفزة في مجموعة النقاط التي تُمثل الشكل البياني للدالة			
مثالان توضيحيان	دالة متصلة		دالة غير متصلة	

النهايات

المقصود بها	اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول لتلك القيمة	
المعنى الهندسي	إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين	
التعبير الرمزي	نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .. $\lim_{x \to c} f(x) = L$	

حالات عدم الاتصال

عدم اتصال لا نهائي	عدم اتصال قفزي	عدم اتصال نُقطي
عند $x = c$ ..	عند $x = c$ ..	عند $x = c$ ..
إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار	إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين	إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة « ○ »
		

اختبار الاتصال

اختبار الاتصال
تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية: • $f(x)$ معرّفة عند c ؛ أي أن $f(c)$ موجودة. • $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة. • $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
مثال توضيحي
حدد إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$ ؛ برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

• هل $f(0)$ موجودة؟

$$f(0) = (0)^3 = 0 \Leftarrow f(0) \text{ موجودة}$$

• هل $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة؟

نُكون جدولاً يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين ..

$f(x)$	$f(x) = x^3, x < 0$				$f(x) = x^3, x > 0$		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-0.0001	-0.000000001		1 000 000 0	01 0.0	0.001

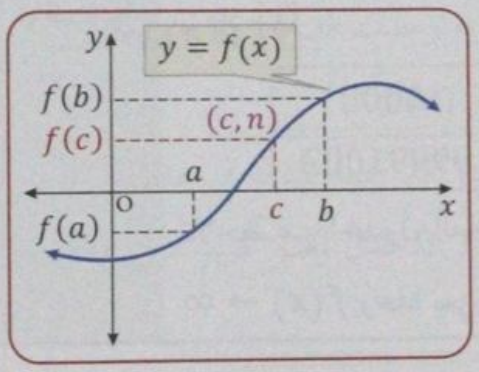
يُبين الجدول أنه عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0 ..

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

• هل $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ ؟

$$\lim_{x \to 0} x^3 = f(0) = 0 \Leftarrow \text{الدالة متصلة عند } x = 0$$

نظرية القيمة المتوسطة

استعمالها	تقريب أصفار الدوال المتصلة	
المعنى الهندسي	إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b بحيث أن $f(c) = n$	
موقع صفر الدالة	إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة؛ فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a ، b بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b	

مثال توضيحي

ما الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = \frac{x^2-6}{x+4}$ في الفترة $[-3, 4]$ ؟

نكون جدول القيم باستعمال الفترة $[-3, 4]$ ..

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-1	-1.66	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

نُلاحظ تغير إشارة $f(x)$ في الفترتين $-3 < x < -2$ ، $2 < x < 3$ ..

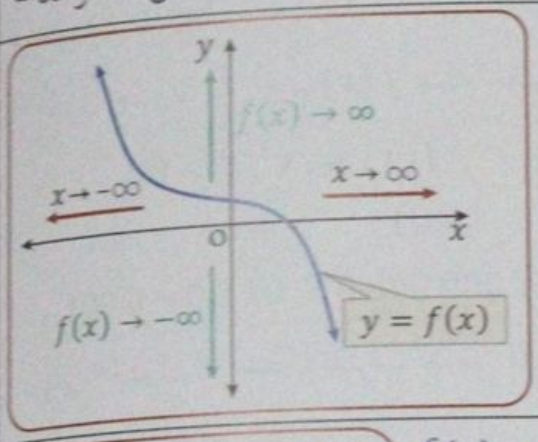
$\therefore$ توجد أصفار حقيقية للدالة في هاتين الفترتين

سلوك طرفي التمثيل البياني

المقصود به: وصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

المعنى الهندسي:

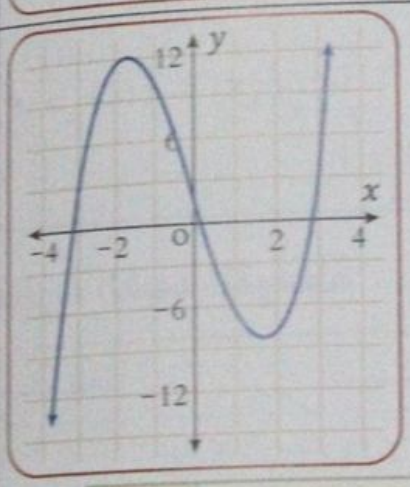
سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



مثال توضيحي: استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 9x + 2$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ بالنظر إلى اليمين، وأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ بالنظر إلى اليسار.

التعزيز عدديًا: نُكوِّن جدولاً لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ ..



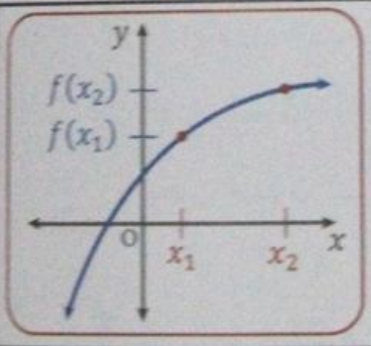
x	-1000	-100	0	100	1000
$f(x)$	-999990998	-999098	2	999102	99991002

نلاحظ من الجدول أنه عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to -\infty$ ؛ وبالمثل عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$ وهذا يعزز الحل بمجرد النظر في التمثيل البياني السابق.

بعض خصائص الدوال

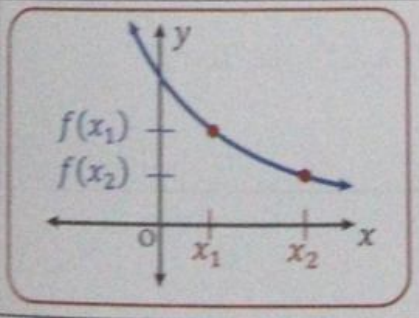
الدوال المتزايدة:

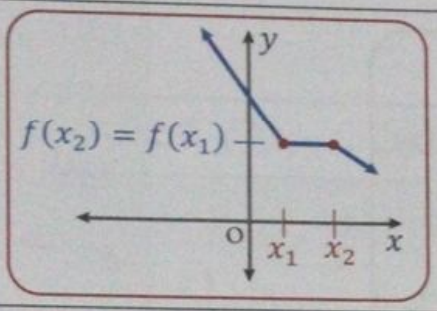
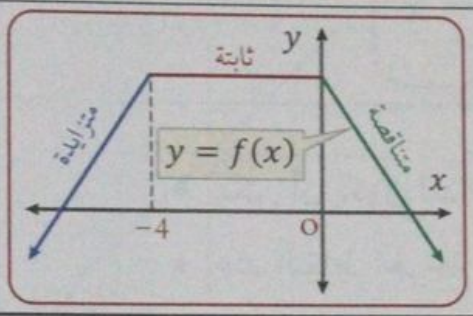
- **التعبير اللفظي:** تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.
- **التعبير الرمزي:** لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



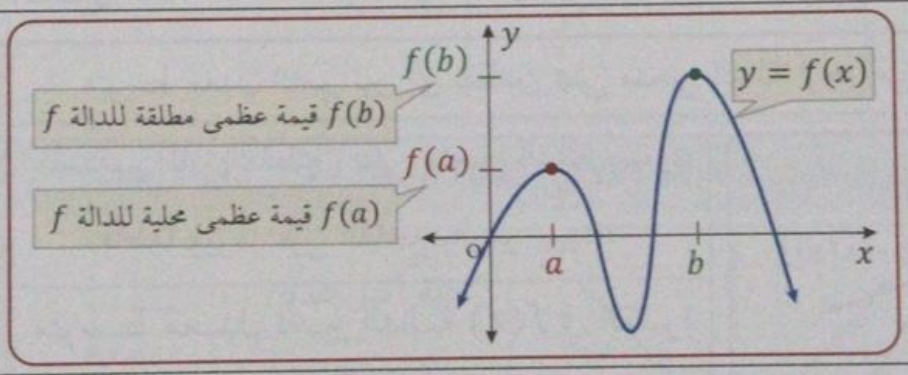
الدوال المتناقصة:

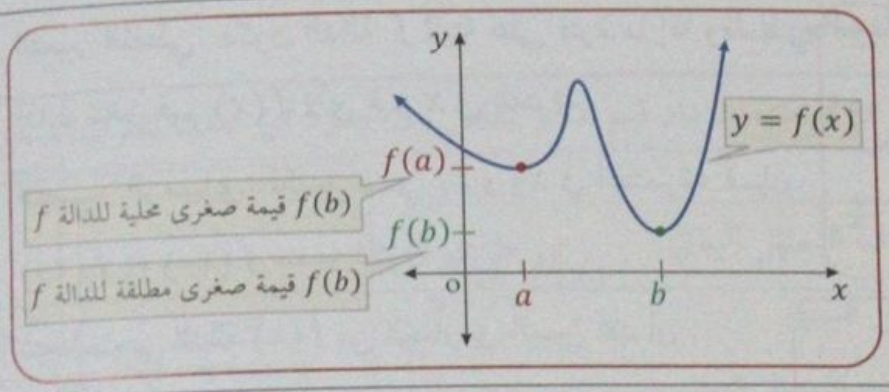
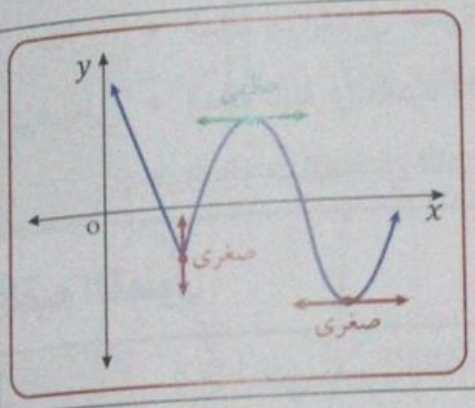
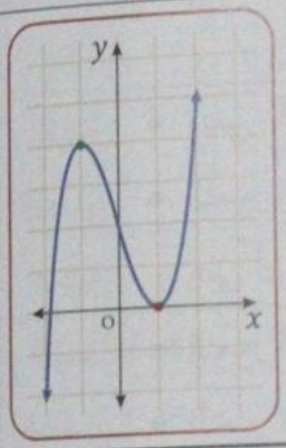
- **التعبير اللفظي:** تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.
- **التعبير الرمزي:** لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.



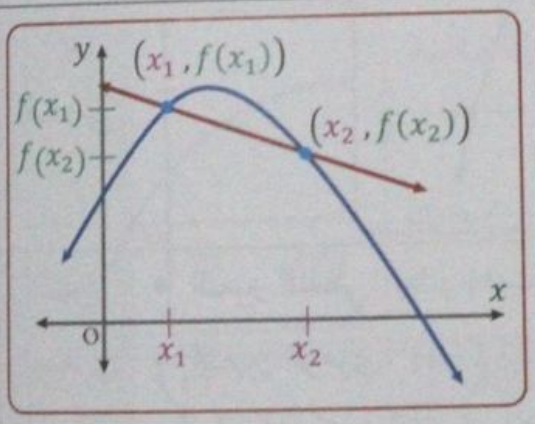
الدوال الثابتة	• **التعبير اللفظي**: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة. • **التعبير الرمزي**: لكل من x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$. 
مثال توضيحي	إذا تتبعنا منحنى الدالة $f(x)$ من اليسار إلى اليمين نجد أن .. • الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -4)$. • الدالة ثابتة في الفترة $(-4, 0)$. • الدالة متناقصة في الفترة $(0, \infty)$. 

القيم القصوى

المقصود بها	النقاط التي تُغيّر الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها مكونة قمة أو قاعًا في منحنى الدالة، وتسمى **نقاطًا حرجة**
القيمة العظمى المحلية	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة للدالة أكبر من كل القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة. • **التعبير الرمزي**: تكوّن $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \geq f(x)$.
القيمة العظمى المطلقة	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها. • **التعبير الرمزي**: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.
المعنى الهندسي	
القيمة الصغرى المحلية	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة للدالة أصغر من كل القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة. • **التعبير الرمزي**: $f(a)$ تكوّن قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2) ، $f(a) \leq f(x)$.
القيمة الصغرى المطلقة	• **التعبير اللفظي**: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها. • **التعبير الرمزي**: تكوّن $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \geq f(x)$.

المعنى الهندسي	
فائدتان	• يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم القصوى. • عند النقاط الحرجة يكون المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند هذه النقاط إما أفقيًا « ميله صفر » أو عموديًا « ميله غير معرّف ». 
مثال توضيحي	في الشكل المجاور يمكننا تعيين القيم القصوى المحلية للدالة .. • القيمة العظمى المحلية عند النقطة $(-1, 4)$ وتساوي 4 . • القيمة الصغرى المحلية عند النقطة $(1, 0)$ وتساوي 0 . 

متوسط معدل التغير

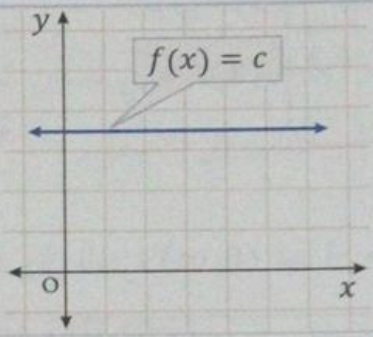
التعبير اللفظي	متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بالنقطتين
المعنى الهندسي	المستقيم المار بالنقطتين على منحنى الدالة يُسمى **قاطعًا** ويرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} 
التعبير الرمزي	متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو .. $m_{sec} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
مثال توضيحي	أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ على الفترة $[2,3]$. $m_{sec} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{2-(-4)}{1} = 6$

الدوال الرئيسة « الأم »

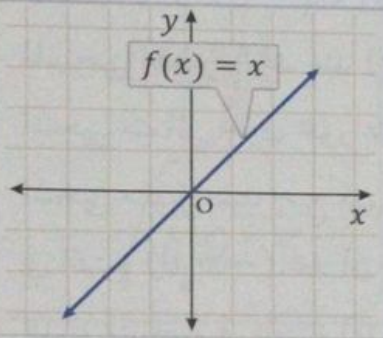
المقصود بها	أبسط دالة في مجموعة عائلة الدوال التي تشترك منحنياتها بصفة أو أكثر

الدوال الرئيسة « الأم » للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

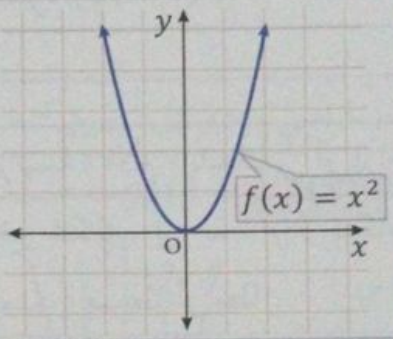
الدالة الثابتة:
$f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثل بمستقيم أفقي



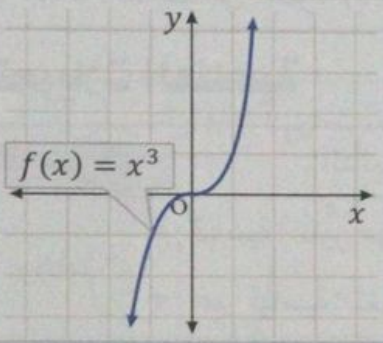
الدالة المحايدة:
$f(x) = x$ وهي تمثل بمستقيم يمر بكل النقاط (a, a)



الدالة التربيعية:
$f(x) = x^2$ وتُمثل بقطع مكافئ شكل الحرف U

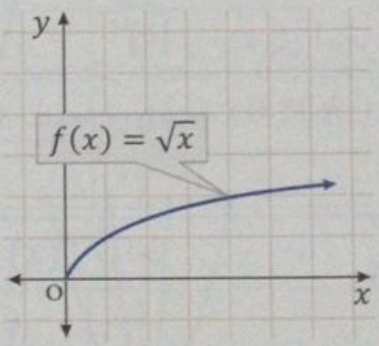


الدالة التكعيبية:
$f(x) = x^3$ وتمثل بمنحنى متماثل بالنسبة لنقطة الأصل

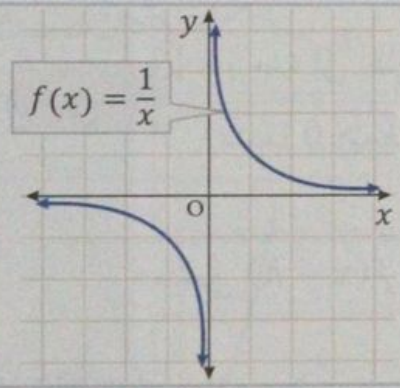


الدوال الرئيسة « الأم » لدالتي الجذر التربيعي والمقلوب

دالة الجذر التربيعي:
$f(x) = \sqrt{x}$

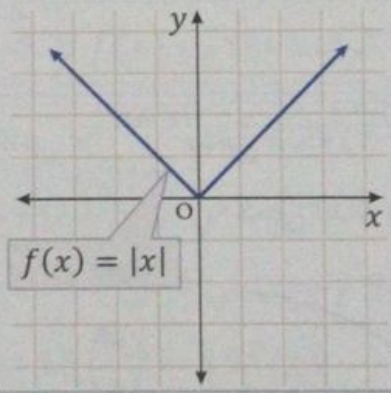


دالة المقلوب:
$f(x) = \frac{1}{x}$

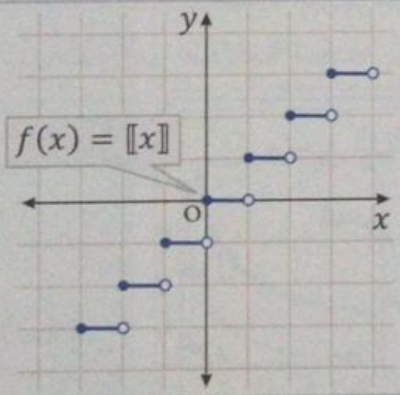


الدوال الرئيسة « الأم » لدالتي القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح

دالة القيمة المطلقة:
$f(x) = |x|$ ويأخذ المنحنى شكل حرف V



دالة أكبر عدد صحيح:
$f(x) = [\![x]\!]$ والتي تسمى الدالة الدرجية

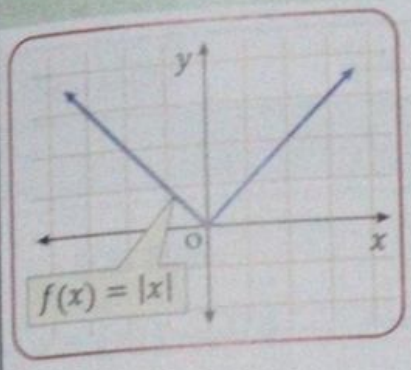


خصائص منحنى الدالة

المجال، المدى، المقطع x ، المقطع y ، التماثل، الاتصال ، سلوك طرفي التمثيل البياني، فترات التزايد والتناقص

مثال توضيحي

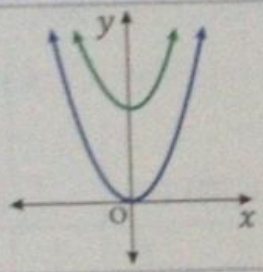
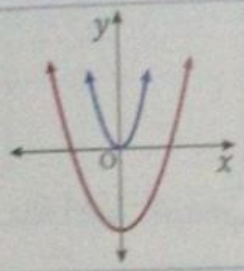
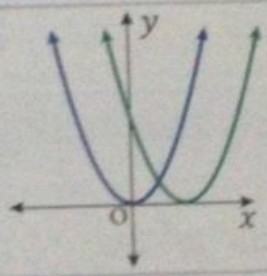
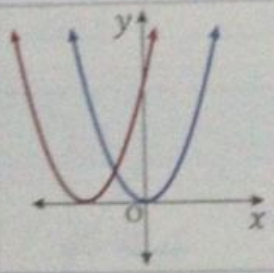
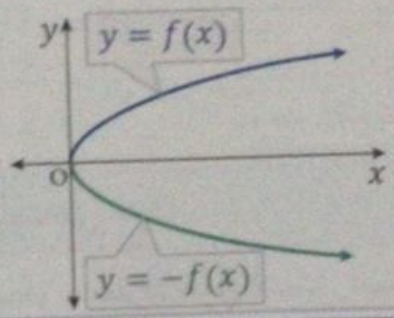
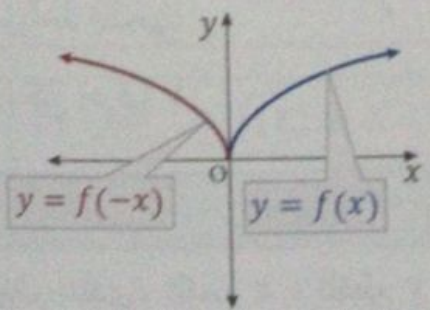
صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة « الأم » $f(x) = |x|$.



خصائص منحنى دالة القيمة المطلقة هي ..

- مجال الدالة $(-\infty, \infty)$ ، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$.
- المنحنى متماثل حول محور y ؛ لذا فإن الدالة زوجية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- في الفترة $(-\infty, 0)$ نجد أن $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، وفي الفترة $(0, \infty)$ نجد أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$.

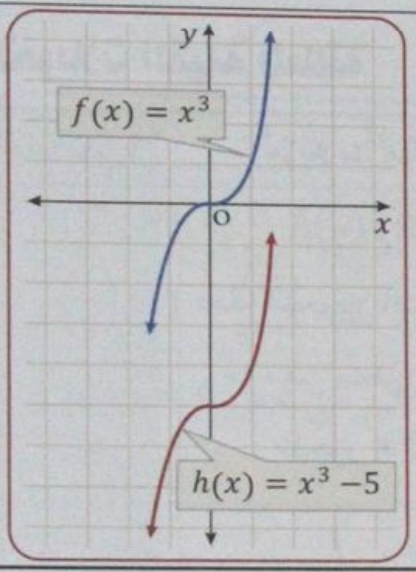
التحويلات الهندسية

ماذا تعني؟	التأثير على منحنى الدوال الرئيسة « الأم » بانعكاس أو إزاحة أو تمدد
نوعاها	• قياسية: تَغيُّر موقع المنحنى فقط دون تغير شكله « إزاحة » أو « انعكاس ». • غير قياسية: تغيُّر شكل المنحنى بـ « التمدد » ضغطًا أو مطًا.
الانسحاب الرأسي	منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا .. k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$  $\lvert k \rvert$ وحدة إلى أسفل عندما $k < 0$ 
الانسحاب الأفقي	منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا .. h وحدة إلى اليمين عندما $k > 0$  $\lvert h \rvert$ وحدة إلى اليسار عندما $k < 0$ 
الانعكاس	حول محور x منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول محور x  حول محور y منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول محور y 

مثال توضيحي

استعمل منحنى الدالة الرئيسة « الأم » $f(x) = x^3$ لتمثيل الدالة $h(x) = x^3 - 5$ بيانيًا.

الدالة $h(x) = x^3 - 5$ هي نفس الدالة الرئيسة « الأم » مزاحة $|-5|$ وحدات إلى الأسفل.



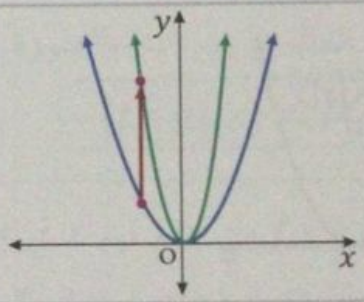
التمدد

ماذا يعني؟ تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضييق « ضغط » أو توسعة « مط » منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا

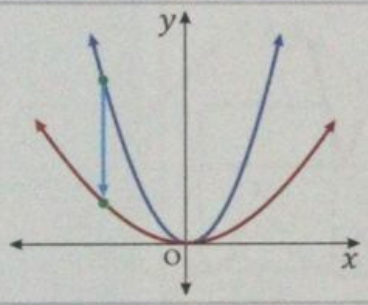
التمدد الرأسي

منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ ؛ حيث a عدد حقيقي موجب هو ..

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $a > 1$



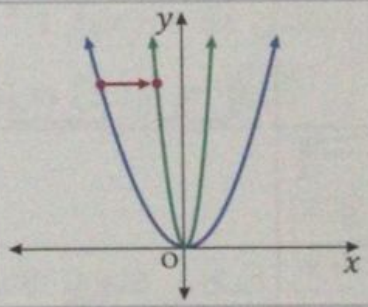
تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $0 < a < 1$



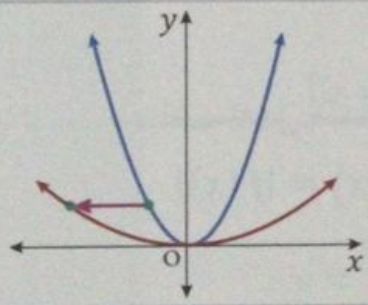
التمدد الأفقي

منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ ؛ حيث a عدد حقيقي موجب هو ..

تضييق أفقي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $a > 1$



توسع أفقي لمنحنى $f(x)$ إذا كانت $0 < a < 1$



مثال توضيحي

عين الدالة الرئيسة « الأم » $f(x)$ للدالة $g(x) = \frac{15}{x} + 3$ ؛ ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

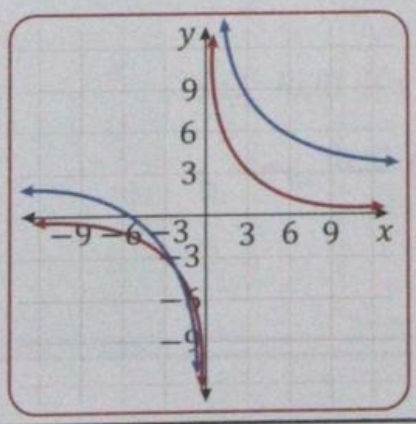
الدالة الرئيسة « الأم » هي $f(x) = \frac{1}{x}$ ..

منحنى $g(x)$ توسع رأسي لمنحنى الدالة الأم بمقدار $a = 15$ لأن ..

$$g(x) = 15\left(\frac{1}{x}\right) = 15f(x)$$

ثم انسحاب مقداره 3 وحدات لأعلى لأن ..

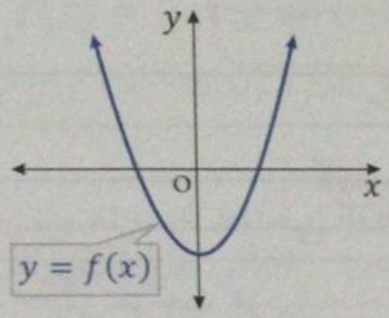
$$g(x) = 15f(x) + 3$$

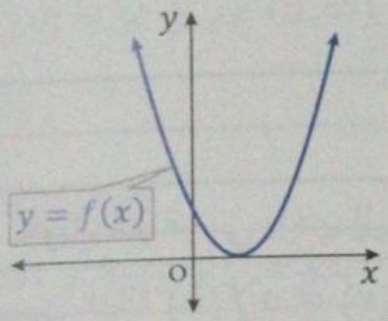


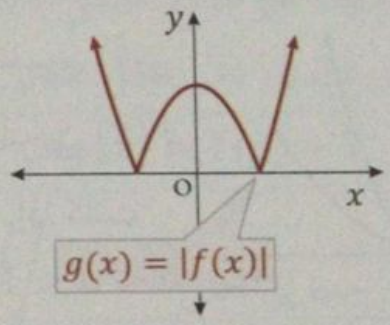
ماذا تعني؟ تحويلات هندسية غير قياسية تعكس أيَّ جزء من منحنى دالة تتضمن القيمة المطلقة

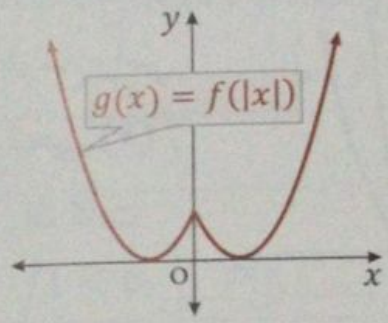
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$g(x) = f(\lvert x \rvert)$
هذا التحويل الهندسي يعكس أيَّ جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه	هذا التحويل الهندسي يغير جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس عليه

نوعاه

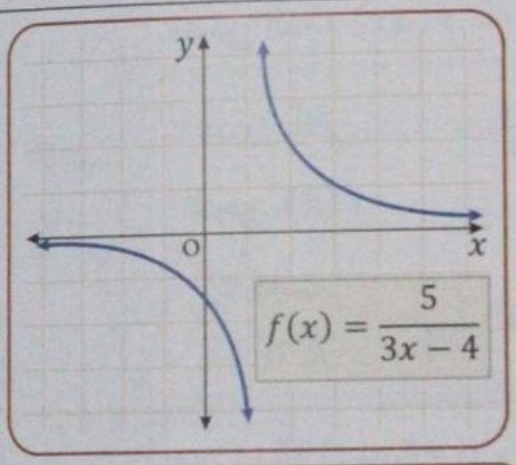




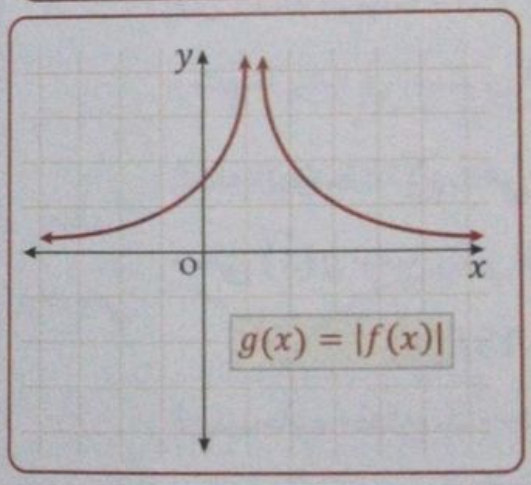




مثال توضيحي



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل الدالة $g(x) = \lvert f(x) \rvert$ بيانيًا.



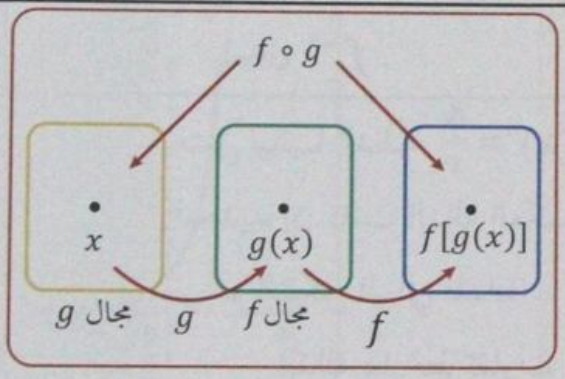
لتمثيل الدالة $g(x) = \lvert f(x) \rvert$ نعكس الجزء السالب من منحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x ..

العمليات على الدوال

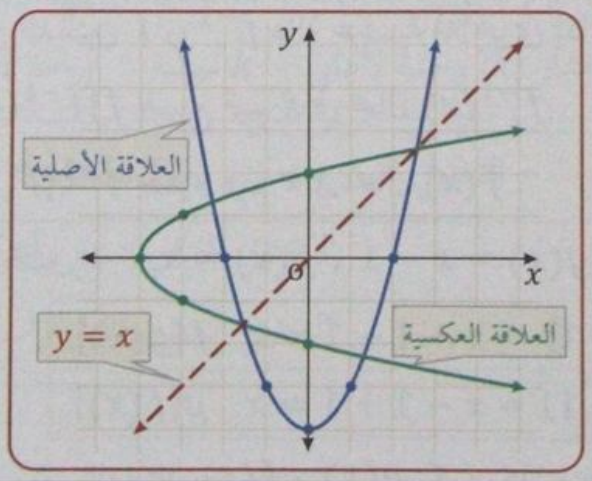
المقصود بها	إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الدوال			
التعبير الرمزي	الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
	الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
مجال الدالة الجديدة	مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة			
مثال توضيحي	أوجد $(f+g)(x)$ للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3x + 2$. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3x + 2$ بما أن مجال كل من f ، g هو $(-\infty, \infty)$ فإن مجال $(f+g)$ هو $(-\infty, \infty)$.			

تركيب دالتين

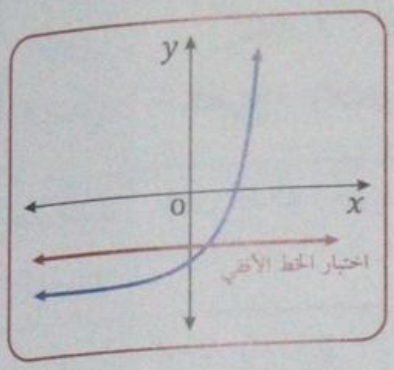
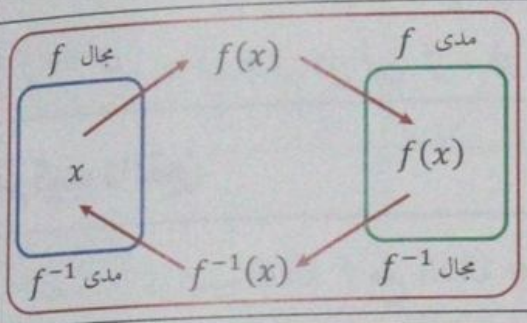
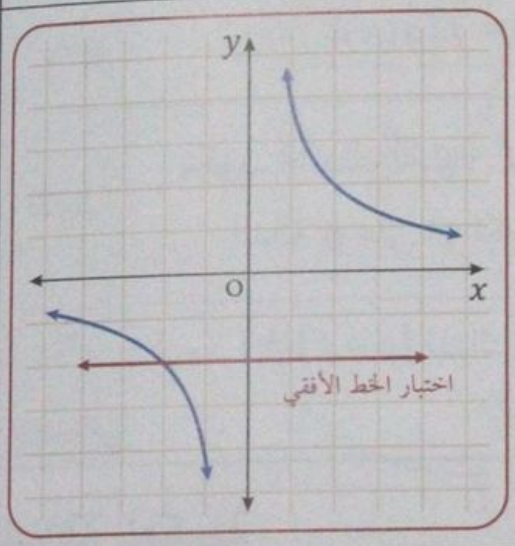
التعبير الرمزي	تركيب الدالة f مع الدالة g يعبر عنه بالصورة.. $[f \circ g](x) = f[g(x)]$
المجال	يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f
مثال توضيحي	أوجد $[g \circ f](x)$ للدالتين $f(x) = 3x$ ، $g(x) = x^2$. $[g \circ f](x) = g[f(x)] = (3x)^2 = 9x^2$



العلاقة العكسية

المقصود بها	انعكاس العلاقة الأصلية حول المستقيم $y = x$
مثال توضيحي	العلاقة الأصلية $y = x^2 - 4$ x ، y: $(-2, 0)$ ، $(0, -4)$ ، $(-2, 0)$  العلاقة العكسية $y^2 = x + 4$ x ، y: $(0, -2)$ ، $(-4, 0)$ ، $(0, 2)$

الدالة العكسية

ماذا تعني؟	علاقة عكسية لـ $f(x)$ بحيث تكون دالة ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$
اختبار الخط الأفقي	• **التعبير اللفظي**: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر. • **مثال توضيحي**: للدالة f في الشكل المجاور لا يوجد خط أفقي يقطع المنحنى بأكثر من نقطة وبالتالي فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة. 
فائدتان	• إذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت دالة متباينة. • إذا كانت الدالة متباينة فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1} . 
مثال توضيحي	مثل بيانيًا الدالة $h(x) = \frac{4}{x}$ ثم طبق الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا. نرسم الشكل البياني للدالة .. الدالة لها خط تقارب رأسي عند $x = 0$ الدالة لها خط تقارب أفقي عند $y = 0$ الخط الأفقي يقطع الدالة في نقطة واحدة .. ∴ الدالة العكسية موجودة 

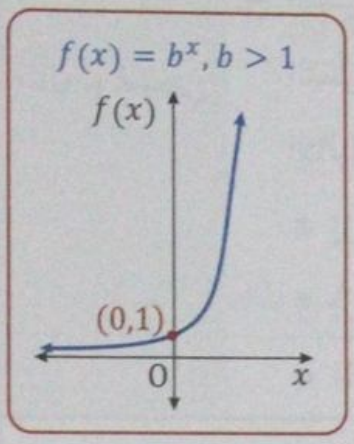
إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

لها شرطان	تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرطان: • $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$. • $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.
مثال توضيحي	لإثبات أن الدالتين $f(x) = x + 1$ ، $g(x) = x - 1$ كل منهما دالة عكسية للأخرى .. $f[g(x)] = f(x-1) = x + 1 - 1 = x$ $f[g(x)]$ $g[f(x)] = g(x+1) = x - 1 + 1 = x$ $g[f(x)]$ ∴ الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ تكون كل منهما دالة عكسية للأخرى

الدوال الأسية

دالة النمو الأسّي

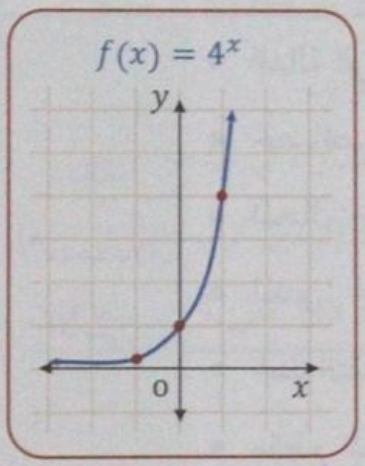
- الدالة الرئيسة « الأم »: $f(x) = b^x \ , \ b > 1$.
- خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد.
- المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .
- خط التقارب: المحور x .
- مقطع المحور: (0,1) .



مثال توضيحي

مثِّل الدالة $y = 4^x$ بيانيًا، ثم حدد مجالها ومداها.

x	$y = 4^x$	(x, y)
⋮	⋮	⋮
-1	$y = 4^{-1} = \frac{1}{4}$	$\left(-1, \frac{1}{4}\right)$
0	$y = 4^0 = 1$	(0,1)
1	$y = 4^1 = 4$	(1,4)
⋮	⋮	⋮



مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية

صورتها القياسية: $f(x) = ab^{x-h} + k$

الإزاحات

h موجبة	إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يمينًا	h سالبة	إزاحة بمقدار $\|h\|$ وحدة يسارًا
k موجبة	إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى	k سالبة	إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل

الشكل والاتجاه

$a < 0$	التمثيل البياني ينعكس حول المحور x عندما $k = 0$
$\|a\| > 1$	التمثيل البياني يتسع رأسيًا
$0 < \|a\| < 1$	التمثيل البياني يضيق رأسيًا

مثال توضيحي

- في الدالة $f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$ ..

$a = 2 \ , \ h = +1 \ , \ k = -3$

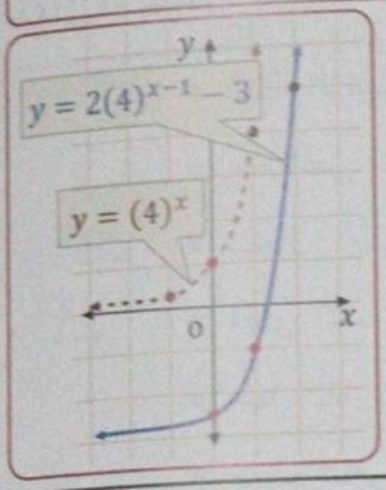
مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية

$f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$

$f(x) = ab^{x-h} + k$

- التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2(4)^{x-1} - 3$ ينتج من التمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = 4^x$ بالتحويلات التالية:

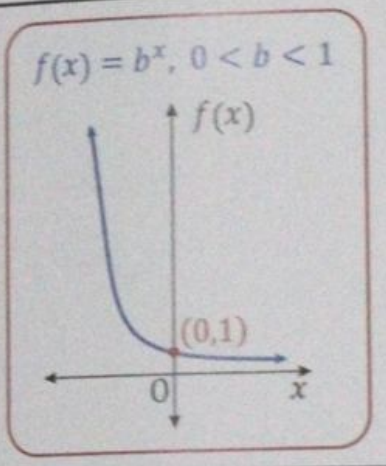
* إزاحة أفقية بمقدار 1 وحدة لليمين.
* إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات للأسفل.
* المنحنى يتسع رأسيًا لأن $a = 2 > 1$.



دالة الاضمحلال الأسي

دالة الاضمحلال الأسّي

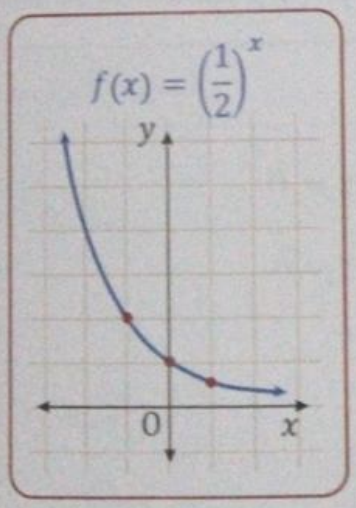
- الدالة الرئيسة « الأم »: $f(x) = b^x \ , \ 0 < b < 1$.
- خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص.
- المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ .
- خط التقارب: المحور x .
- مقطع المحور: (0,1) .



مثال توضيحي

مثل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، ثم حدد مجالها ومداها.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
⋮	⋮	⋮
-1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1,2)$
0	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$	$(0,1)$
1	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
⋮	⋮	⋮



مجال الدالة مجموعة الأعداد الحقيقية R ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

المعادلات الأسية

المقصود بها	معادلة تظهر فيها المتغيرات في موقع الأسس
خاصية المساواة للدالة الأسية	• التعبير الرمزي: إذا كان $b > 0, b \neq 1$ فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$. • مثال توضيحي: إذا كان $7^x = 7^2$ فإن $x = 2$ وإذا كان $x = 2$ فإن $7^x = 7^2$.
حساب الربح المركب	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ A المبلغ الكلي بعد t سنة — r معدل الربح السنوي المتوقع P رأس المال الذي تم استثماره — n عدد مرات إضافة الأرباح لرأس المال في السنة
مثال توضيحي	أوجد حل المعادلة $4^{2n-1} = 64$. $4^{2n-1} = 64$ $(2^2)^{2n-1} = 2^6$ « وضعنا $4 = 2^2 , 64 = 2^6$ » $2^{4n-2} = 2^6$ « ضربنا القوتين » $4n - 2 = 6$ « خاصية المساواة في الدالة الأسية » $4n = 8$ « أضفنا 2 للطرفين ثم بسطنا » $n = 2$ « قسمنا الطرفين على 4 ثم بسطنا »

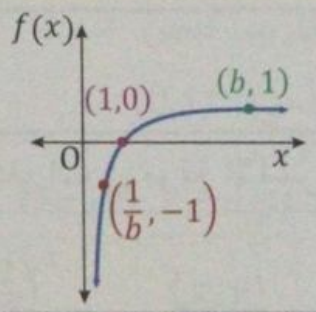
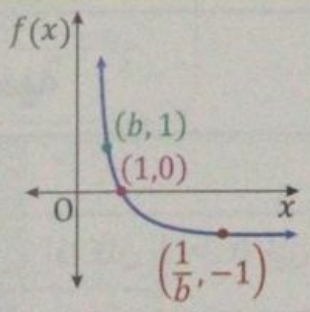
المتباينة الأسية

المقصود بها	متباينة تظهر فيها المتغيرات في موقع الأسس
خاصية التباين للدالة الأسية	إذا كان $b > 1$ فإن .. $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ ، و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $2^{x+2} > \frac{1}{32}$. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $2^{x+2} > \frac{1}{(2)^5}$ « وضعنا $32 = 2^5$ » $2^{x+2} > 2^{-5}$ « قاعدة الأس السالب » $x + 2 > -5$ « قاعدة التباين للدوال الأسية » $x > -7$ « طرحنا 2 من الطرفين ثم بسطنا »

أساسيات عن اللوغاريتم

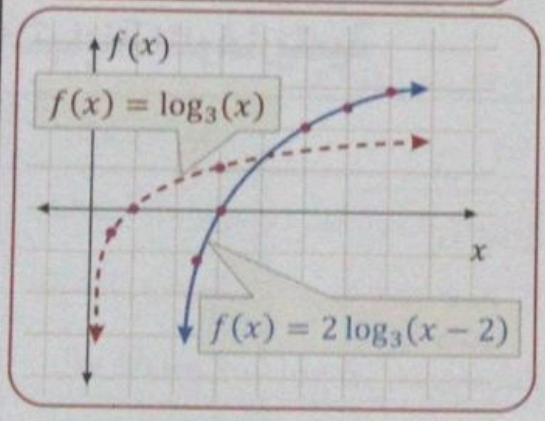
المقصود به	الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة حيث b , x عددان موجبان و $b \neq 1$
علاقة الصورة الأسية باللوغاريتمية	$b^y = x \Leftrightarrow y = \log_b x$
الخصائص الأساسية للوغاريتمات	• $\log_b 1 = 0$. • $\log_b b^x = x$. • $\log_b b = 1$. • $b^{\log_b x} = x$.
مثال توضيحي1	اكتب المعادلة اللوغاريتمية $\log_4 16 = 2$ على الصورة الأسية. $\log_4 16 = 2 \Rightarrow 16 = 4^2$
مثال توضيحي2	أوجد قيمة العبارة اللوغاريتمية $\log_3 81$. $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

الدالة اللوغاريتمية

المقصود بها	الدالة $f(x) = \log_b x$ تسمى الدالة اللوغاريتمية الأم حيث b , x عددان موجبان و $b \neq 1$	
تمثيلها بيانيًا	$f(x) = \log_b x \ , \ b > 1$  	$f(x) = \log_b x \ , \ 0 < b < 1$ 
خصائص الدالة الأم	• **المجال**: الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ . • **المدى**: الأعداد الحقيقية R .	• **خط التقارب**: المحور y . • **مقطع المحور x** : النقطة (1,0) .
تنبيهان	• إذا كانت $b > 1$ فإن منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ متصل ومتباين ومتزايد. • إذا كانت $0 < b < 1$ فإن منحنى الدالة $f(x) = \log_b x$ متصل ومتباين ومتناقص.	

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية

صورتها القياسية	$f(x) = a\log_b(x - h) + k$
الإزاحة الأفقية	• إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يمينًا، إذا كانت h موجبة. • إزاحة بمقدار $\lvert h \rvert$ وحدة يسارًا، إذا كانت h سالبة.

الإزاحة الرأسية	• إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأعلى، إذا كانت k موجبة. • إزاحة بمقدار $\|k\|$ وحدة لأسفل، إذا كانت k سالبة.
الشكل والاتجاه	• إذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x عندما $k = 0$. • إذا كانت $\|a\| > 1$ فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. • إذا كانت $0 < \|a\| < 1$ فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
مثال توضيحي	مثل الدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$. في الدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$ نجد أن .. $a = 2 \ , \ h = 2 \ , \ k = 0$ التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2\log_3(x-2)$ هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الأم $f(x) = \log_3(x)$ بالتحويلات التالية: • إزاحة أفقية بمقدار 2 وحدة إلى اليمين لأن $h = 2$. • بدون إزاحة رأسية لأن $k = 0$. • المنحنى يتسع رأسيًا لأن $a = 2 > 0$. **مقارنة الدالة المعطاة بالصورة القياسية** $f(x) = 2\log_3(x-2) + 0$ $f(x) = a\log_b(x-h) + k$ 

خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب	إذا كانت a , b , x أعدادًا حقيقية موجبة و $x \neq 1$ فإن .. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$
خاصية القسمة	إذا كانت a , b , x أعدادًا حقيقية موجبة و $x \neq 1$ فإن .. $\log_3 \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$
خاصية لوغاريتم القوة	لأي عدد حقيقي p ، وأي عددين حقيقيين موجبين m , b حيث $b \neq 1$ فإن .. $\log_b m^p = p\log_b m$
مثال توضيحي	احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$. $\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 (36)^{\frac{1}{3}} = \log_6 [(6)^2]^{\frac{1}{3}} = \log_6 [6]^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_6 6 = \frac{2}{3}$

المقصود بها	معادلة تحوي لوغاريتمًا واحدًا أو أكثر
خاصية المساواة	إذا كانت b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$ فإن .. $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$
مثال توضيحي	أوجد حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$. $\log_9 x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = (3)^{\cancel{2}\times\frac{3}{\cancel{2}}} = 3^3 = 27$

المتباينة اللوغاريتمية

المقصود بها	متباينة تحوي عبارة لوغاريتمية أو أكثر
خاصية التباين للدوال وحيدة اللوغاريتم	إذا كانت $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x > y$ فإن $x > b^y$ إذا كانت $b > 1$ و $x > 0$ و $\log_b x < y$ فإن $0 < x < b^y$
خاصية التباين للدوال تتضمن عبارتين لوغاريتميتين	إذا كانت $b > 1$ فإن .. $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$. نُوجد حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$ بتطبيق خاصية التباين للدوال وحيدة اللوغاريتم .. $\log_4 x \geq 3 \Rightarrow x \geq 4^3 \Rightarrow x \geq 64$

اللوغاريتم العشري

المقصود به	لوغاريتم أساسه 10 ، ويُكتب دون كتابة الأساس 10
فائدة	ترتبط اللوغاريتمات العشرية بقوى العدد 10 الصحيحة كالتالي: • $\log 10 = \log 10^1 = 1$. • $\log 1000 = \log 10^3 = 3$. • $\log 100 = \log 10^2 = 2$. • $\log 10^m = m$.

صيغة تغيير الأساس

المقصود بها	كتابة عبارة لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف

التعبير الرمزي	لأي أعداد موجبة a, b, n حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ فإن .. $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
صيغة التغيير للوغاريتم عشري	$\log_a n = \frac{\log n}{\log a}$
مثال توضيحي	أوجد حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ ، وقرب الناتج لأقرب جزء من عشرة آلاف. $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ $\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$ « خاصية التباين للوغاريتمات » $2x \log 3 \geq (x+1) \log 6$ « خاصية لوغاريتم القوة » $2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$ « خاصية التوزيع » $2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$ « طرحنا $x \log 6$ من الطرفين » $x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$ « أخذنا x عاملاً مشتركًا » $x \geq \frac{\log 6}{2 \log 3 - \log 6}$ « قسمنا الطرفين على $2 \log 3 - \log 6$ » $x \geq 4.4190$ « بسطنا بالحاسبة » $\therefore$ مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

الفصل الثالث: المتطابقات والمعادلات المثلثية

المتطابقات المثلثية الأساسية

المقصود بها	متطابقة تحوي دوال مثلثية	
المتطابقات النسبية	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$, $\csc\theta \neq 0$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta \neq 0$
	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta \neq 0$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta \neq 0$
	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta \neq 0$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta \neq 0$
متطابقات فيثاغورس	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

المتطابقات المثلثية الأساسية

متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$
متطابقات الدوال الزوجية والفردية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

مثال توضيحي

بسّط $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta)$.

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1 - \cos^2\theta) = \frac{\sec\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta$$ « من العلاقة $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ »

$$= \frac{\sec\theta}{\cancel{\sin\theta}}\cancel{\sin\theta}\sin\theta$$ « حذفنا $\sin\theta$ بسطًا ومقامًا »

$$= \sec\theta\sin\theta$$ « بسطنا »

$$= \frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$$ « عوضنا $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ »

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$ « عوضنا $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ »

...بات صحة المتطابقة

الطريقة	(١) نبسّط الطرف الأكثر تعقيدًا حتى يصبح الطرفان متساويين. (٢) نحول العبارة في هذا الطرف إلى صورة العبارة في الطرف الأسهل.

مثال توضيحي	أثبت أن $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=1$. $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=1$

متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$.

نختار زاويتين معلومتين الفرق بينهما $15°$ فنجد أن $\sin 15° = \sin(60° - 45°)$ ؛ ومنه فإن ..

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ « متطابقة الفرق »

$\sin(60°-45°)=\sin 60°\cos 45°-\cos 60°\sin 45°$ « أخذنا $A=60°, B=45°$ »

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ « عوضنا عن النسب المثلثية »

$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ « بسطنا »

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

متطابقة $\tan 2\theta$	متطابقة $\cos 2\theta$	متطابقة $\sin 2\theta$
$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ ، علمًا أن: $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ ، $90°<\theta<180°$.

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ « متطابقة فيثاغورس »

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ « طرحنا $\cos^2\theta$ من الطرفين »

$\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ « عوضنا عن $\cos\theta=\frac{1}{3}$ »

$\sin^2\theta=\frac{8}{9}\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي للطرفين »

بما أن $90°<\theta<180°$ فإن θ تقع في الربع الثاني و $\sin\theta$ موجبة؛ ومنه فإن $\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

متطابقة $\tan\frac{\theta}{2}$	متطابقة $\cos\frac{\theta}{2}$	متطابقة $\sin\frac{\theta}{2}$
$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\ ,\ \cos\theta \neq -1$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

مثال توضيحي

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ؛ علمًا أن: $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ؛ θ تقع في الربع الثاني.

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ « متطابقة فيثاغورس »

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$ « طرحنا $\sin^2\theta$ من الطرفين »

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$ « عوضنا عن $\sin\theta = \frac{1}{3}$ »

$$\cos^2\theta = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$ « بسطنا ثم أخذنا الجذر التربيعي للطرفين »

بما أن θ تقع في الربع الثاني فإن $\cos\theta$ سالبة؛ ومنه فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

نُوجد ـ الآن ـ القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ..

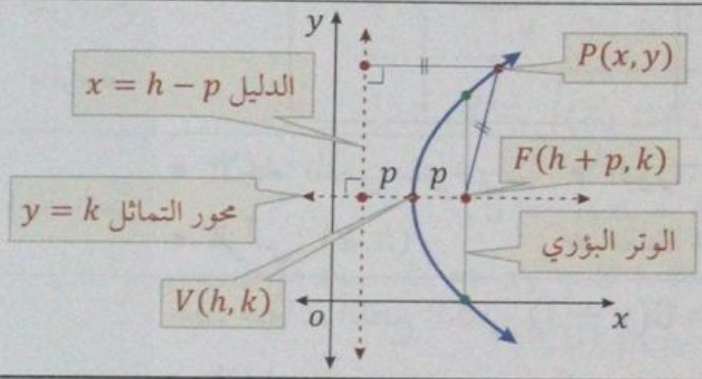
$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$$

حل المعادلة المثلثية

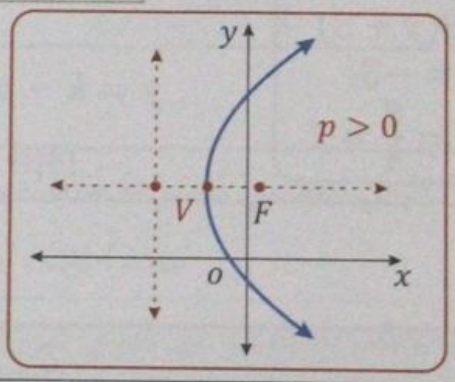
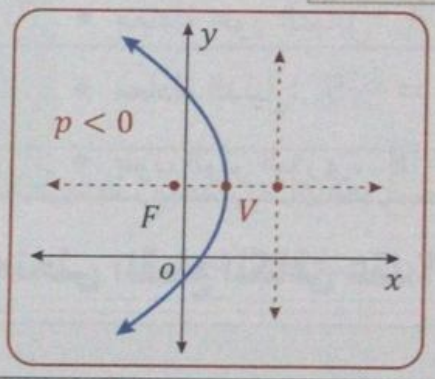
المقصود به	الحصول على قيم محددة للمتغير تكون عندها المعادلة صحيحة
أنواع الحلول	• حل المعادلة على فترة معطاه. • عدد لا نهائي من الحلول. • حلول دخيلة.
مثال توضيحي	حل المعادلة $\sin 2\theta = \cos\theta$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $\sin 2\theta = \cos\theta$ $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ « طرحنا $\cos\theta$ من الطرفين » $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ « عوضنا عن $\sin 2\theta$ » $\cos\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$ « أخذنا $\cos\theta$ عامل مشترك » إما $\cos\theta = 0$ ؛ ومنه فإن .. $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ أو $2\sin\theta - 1 = 0$ ؛ ومنه فإن .. $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

الفصل الرابع: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

القطع المكافئ

المقصود به	مجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كلٍ منها عن نقطة ثابتة مساويًا لبُعدها عن مستقيم « النقطة الثابتة تسمى **البؤرة** ، والمستقيم يسمى **الدليل** »	
محور التماثل	خط مستقيم عمودي على الدليل ومارًا بالبؤرة	
الرأس	نقطة تقاطع القطع مع محور التماثل	
الوتر البؤري	قطعة مستقيمة مارة بالبؤرة وعمودية على محور التماثل وطرفاها تقع على القطع	

خصائص القطع المكافئ المفتوح أفقيًا

المعادلة القياسية مع التوضيح بالرسم	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$  
الخصائص	• **الاتجاه**: المنحنى مفتوح أفقيًا. • **البؤرة**: $(h+p,k)$. • **معادلة الدليل**: $x = h - p$. • **الرأس**: (h,k) . • **معادلة محور التماثل**: $y = k$. • **طول الوتر البؤري**: $\|4p\|$.
فائدتان	• إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن القطع مفتوح أفقيًا. • فتحة القطع لليمين إذا كانت $p > 0$ ولليسار إذا كانت $p < 0$.
مثال توضيحي	في القطع المكافئ الذي معادلته $(y-2)^2 = 8(x-3)$ .. • **الاتجاه**: المنحنى مفتوح أفقيًا. • **الرأس**: $(h,k) = (3,2)$. • **البؤرة**: $(h+p,k) = (3+2,3) = (5,3)$. • **معادلة محور التماثل**: $y = k = 2$. • **معادلة الدليل**: $x = h - p = 3 - 2 = 1$. • **طول الوتر البؤري**: $\|4p\| = \|4(2)\| = 8$.

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

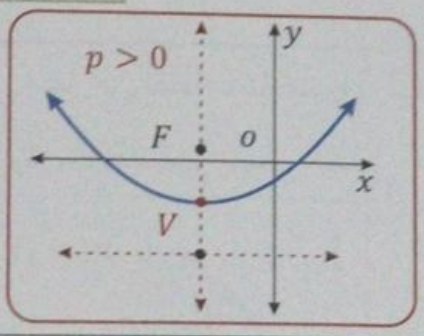
$(y-2)^2 = 8(x-3)$

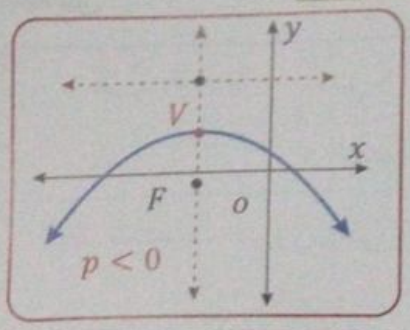
$k = 2 \ , \ h = 3$

$4p = 8 \Rightarrow p = 2$

المعادلة القياسية مع التوضيح بالرسم

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$





الخصائص

- **الاتجاه:** المنحنى مفتوح رأسيًا. • **البؤرة:** $(h, k+p)$. • **معادلة الدليل:** $y = k - p$.
- **الرأس:** (h, k) . • **معادلة محور التماثل:** $x = h$. • **طول الوتر البؤري:** $|4p|$.

مثال توضيحي

حدد صفات القطع المكافئ $(x-4)^2 = 8(y+3)$.

- **الاتجاه:** المنحنى مفتوح رأسيًا.
- **الرأس:** $(h, k) = (4, -3)$.
- **البؤرة:** $(h, k+p) = (4, -3+2) = (4, -1)$.
- معادلة محور التماثل: $x = h = 4$.
- **معادلة الدليل:** $y = k - p = -3 - 2 = -5$.
- **طول الوتر البؤري:** $|4p| = |4(2)| = 8$.

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

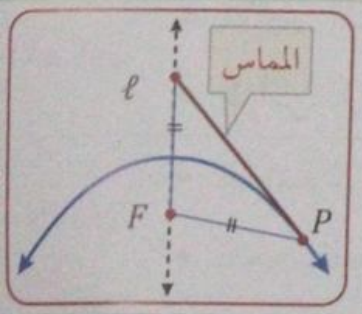
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$
$$(x-4)^2 = 8(y+3)$$
$$h = 4 \ , \ k = -3$$
$$4p = 8 \Rightarrow p = \frac{8}{4} = 2$$

مماس منحنى القطع المكافئ عند النقطة P

المقصود به

أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث ..

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع المطابق الثاني.



مثال توضيحي

- اكتب معادلة مماس القطع $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ عند النقطة $(1, -4)$.
- نُوجد البؤرة F من معادلة القطع $x = 5 - \frac{y^2}{4}$ ..

$$4x = 20 - y^2$$
$$y^2 = 20 - 4x$$
$$(y-0)^2 = -4(x-5)$$

مقارنة معادلة القطع بالصورة القياسية

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(y-0)^2 = -4(x-5)$$
$$k = 0 \ , \ h = 5$$
$$4p = -4 \Rightarrow p = -1 < 0$$

وبما أن $p = -1 < 0$ فإن القطع مفتوح أفقياً وتكون ..

البؤرة $F = (h + p, k) = (5 + (-1), 0) = (4, 0)$

- نُوجد المسافة d بين $p(1, 4), F(4, 0)$ باستعمال قانون المسافة ..

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-0)^2} = 5$$

- نُوجد إحداثي $\ell(x_2, y_2)$ والتي تقع على محور تماثل القطع باستعمال البؤرة $F(4, 0)$ والمسافة d ..

بما أن النقطة $\ell(x_2, y_2)$ تقع على محور التماثل فإن $y_2 = 0$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$5 = \sqrt{(x_2 - 4)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$5 = x_2 - 4 \Rightarrow x_2 = 5 + 4 = 9 \Rightarrow \ell(x_2, y_2) = (9, 0)$$

- نُوجد ميل المماس المطلوب باستخدام النقطتين $\ell(9, 0), p(1, -4)$ ..

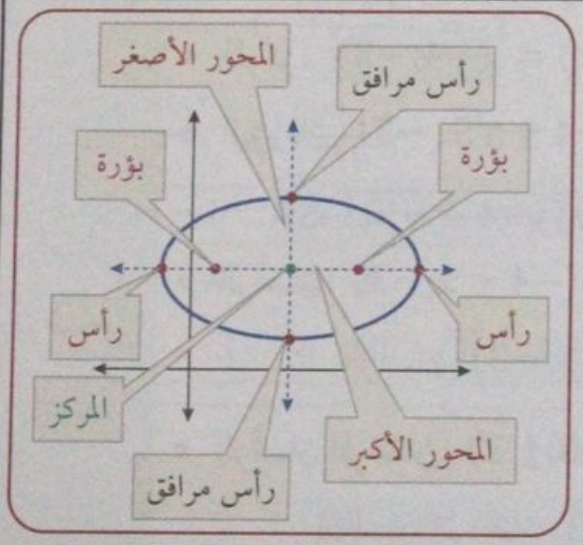
$$m = \frac{0-(-4)}{9-1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- نُوجد معادلة المماس المطلوب بمعلومية الميل m والنقطة $\ell = (9, 0)$ ..

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$$

القطع الناقص

المقصود به	المحل الهندسي لمجموعة نقاط مستوية يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقداراً ثابتًا، وتسمى النقطتان الثابتتان **البؤرتين**
المحور الأكبر	القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين والتي نهايتاها على منحنى القطع
المركز	نقطة منتصف المحور الأكبر أو الأصغر
المحور الأصغر	القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز والتي نهايتاها على منحنى القطع وتتعامد على المحور الأكبر
الرأسان	نهايتا المحور الأكبر
الرأسان المرافقان	نهايتا المحور الأصغر

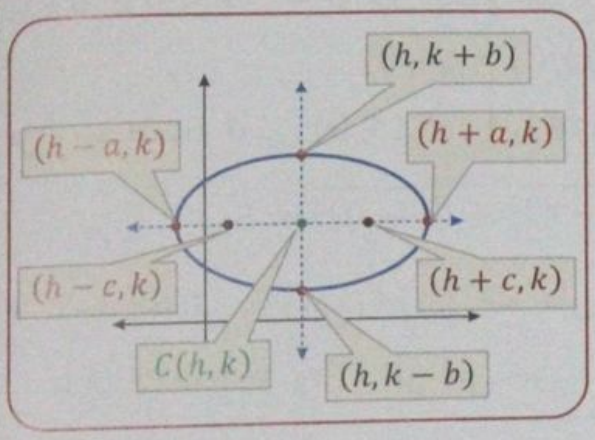


القطع الناقص الذي محوره الأكبر أفقي

معادلته القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	a البعد بين المركز والرأس. (h, k) إحداثيا المركز. b البعد بين المركز والرأس المرافق.

خصائصه

- **الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي.
- **المركز:** (h,k) .
- **البؤرتان:** $(h \pm c, k)$.
- **الرأسان:** $(h \pm a, k)$.
- **الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b)$.
- **المحور الأكبر:** $y = k$.
- **المحور الأصغر:** $x = h$.



تحديد المركز (h,k)

نُوجد مركز القطع الناقص بإحدى الطرق التالية:

- نُوجد نقطة تقاطع المحورين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين البؤرتين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين الرأسين.
- نُوجد نقطة المنتصف بين الرأسين المرافقين.

علاقات مهمة

طول المحور الأكبر $= 2a$	$c^2 = a^2 - b^2$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
البعد بين البؤرتين $= 2c$	
طول المحور الأصغر $= 2b$	

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** المحور الأكبر أفقي.
- **المركز:** $(h,k) = (-4,-3)$.
- **البؤرتان:** $(h \pm c, k) = (-4 \pm \sqrt{5}, -3)$.

  $(-4-\sqrt{5}, -3), (-4+\sqrt{5}, -3)$
- **الرأسان:** $(h \pm a, k) = (-4 \pm 3, -3)$.

  $\therefore$ الرأسان $(-7,-3), (-1,-3)$
- **الرأسان المرافقان:** $(h, k \pm b) = (-4, -3 \pm 2)$.

  $\therefore$ الرأسان المرافقان $(-4,-5), (-4,-1)$
- **المحور الأكبر:** $y = k = -3$.
- **المحور الأصغر:** $x = h = -4$.

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

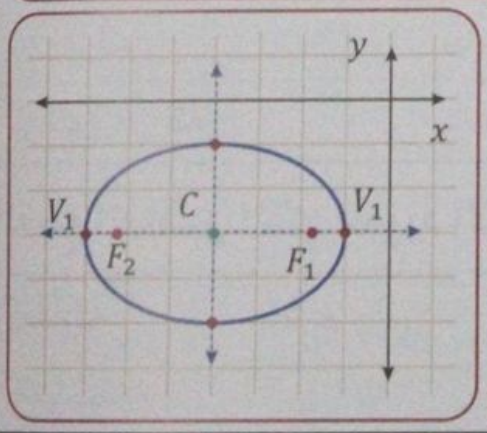
مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
-4	-3	3	2	$\sqrt{5}$



القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي

معادلته القياسية

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

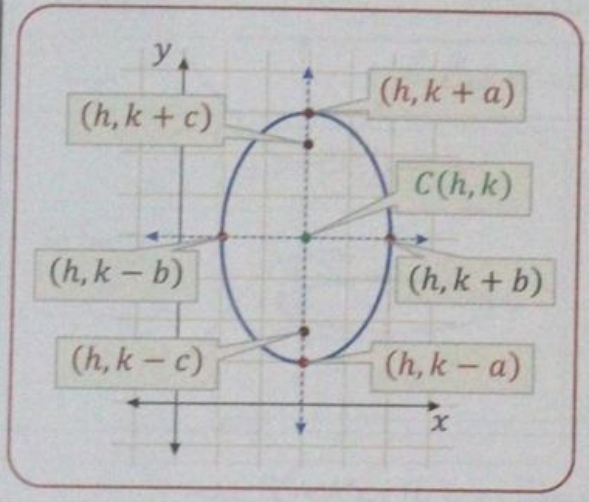
a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

(h,k) إحداثيا المركز.

خصائصه

- الاتجاه: المحور الأكبر رأسي.
- المركز: (h,k) .
- البؤرتان: $(h,k\pm c)$.
- الرأسان: $(h,k\pm a)$.
- الرأسان المرافقان: $(h\pm b,k)$.
- المحور الأكبر: $x=h$.
- المحور الأصغر: $y=k$.



العلاقة بين a, b, c

$$c^2=a^2-b^2 \quad \text{أو} \quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

c البعد بين المركز والبؤرة.

a البعد بين المركز والرأس.

b البعد بين المركز والرأس المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$ ، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- الاتجاه: المحور الأكبر رأسي.
- المركز: $(h,k)=(6,-3)$.
- البؤرتان: $(h,k\pm c)=(6,-3\pm\sqrt{7})$.

$(6,-3-\sqrt{7}),(6,-3+\sqrt{7})$

- الرأسان: $(h,k\pm a)=(6,-3\pm 4)$.

$\therefore$ الرأسان $(6,1),(6,-7)$

- الرأسان المرافقان: $(h\pm b,k)=(6\pm 3,-3)$.

$\therefore$ الرأسان المرافقان $(9,-3),(3,-3)$

- المحور الأكبر: $x=h=6$.
- المحور الأصغر: $y=k=-3$.

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$$

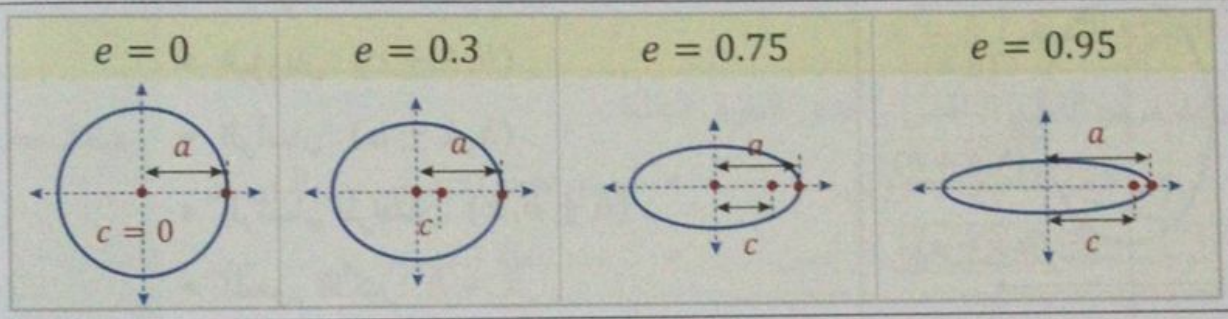
$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

h	k	a	b	c
6	−3	4	3	$\sqrt{7}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

المقصود به	الاختلاف المركزي e هو نسبة c إلى a ؛ ويُعطى بالعلاقة .. $\boxed{e = \frac{c}{a}}$	c البعد بين المركز والبؤرة. a البعد بين المركز والرأس.
دلالته	قيمته تدل على دائرية أو اتساع القطع الناقص	
تنبيه	قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تنحصر بين 0 و 1	

التوضيح بالرسم



مثال توضيحي

حدد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$.

نُحدد قيمتي a, c ..

$a^2 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{48}$, $b^2 = 18$,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{48 - 18} = \sqrt{30}$

نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e ..

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{48}} \approx 0.79$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$$

الدائرة

معادلتها القياسية	معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r .. $\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$

مثال توضيحي

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 3 وحدات.

نُحدد قيم h, k, r ..

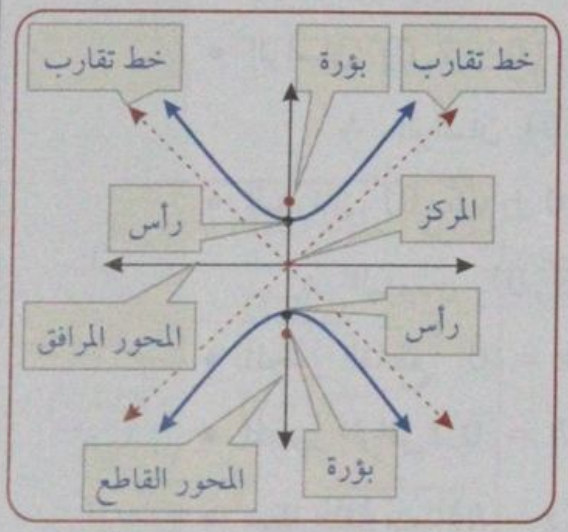
المركز $(h,k) = (0,0) \Rightarrow h = 0 , k = 0$, نصف القطر $r = 3$

وبالتعويض في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة ..

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

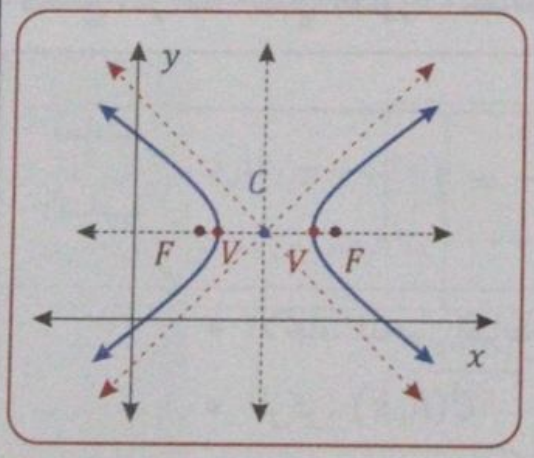
القطع الزائد

المقصود به	المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقداراً ثابتًا « $2a$ »
مكوناته	يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي التقارب
الرأسان	نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى
المركز	نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين
المحور القاطع	محور تماثل للقطع يمر بالرأسين
المحور المرافق	محور تماثل للقطع عمودي على المحور القاطع ويمر بالمركز



القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي

معادلته القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	a البعد بين المركز والرأس. b نصف طول المحور المرافق. (h,k) إحداثيا المركز.
خصائصه	• الاتجاه: المحور القاطع أفقي. • المركز: $C(h,k)$. • الرأسان: $V(h \pm a, k)$. • البؤرتان: $F(h \pm c, k)$. • المحور القاطع: $y = k$. • المحور المرافق: $x = h$. • خطا التقارب: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$.	
علاقات مهمة	طول المحور القاطع « البُعد بين الرأسين » $= 2a$ طول المحور المرافق $= 2b$ ، البُعد بين البؤرتين $= 2c$ $c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 + b^2}$	c البعد بين المركز والبؤرة. a البعد بين المركز والرأس. b نصف طول المحور المرافق.



حدد خصائص القطع الزائد $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ ، ثم مثل منحناه بيانيًا.

مثال توضيحي

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** أفقي « الحد المطروح منه يحوي x ».
- **المركز:** $(h,k) = (0,0)$.
- **الرأسان:** $(h \pm a, k) = (0 \pm 2, 0)$.

∴ الرأسان $(2,0), (-2,0)$

- **البؤرتان:** $(h \pm c, k) = (0 \pm \sqrt{5}, 0)$.

∴ البؤرتان $(\sqrt{5},0), (-\sqrt{5},0)$

- **المحور القاطع:** $y = k = 0$.
- **المحور المرافق:** $x = h = 0$.
- **خطا التقارب:** $y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$.

$$y - 0 = \pm\frac{1}{2}(x-0) \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$$

∴ خطا التقارب هما

$$y = \frac{1}{2}x \ , \ y = -\frac{1}{2}x$$

ثانيًا: نرسم منحنى القطع ..

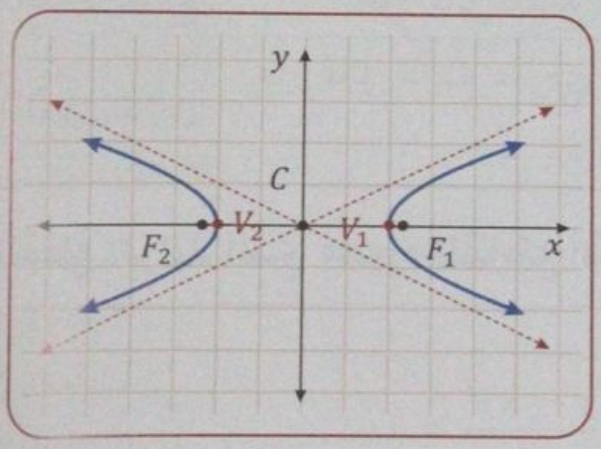
مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{4} - \frac{(y-0)^2}{1} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

h	k	a	b	c
0	0	2	1	$\sqrt{5}$



القطع الزائد الذي محوره القاطع أفقي

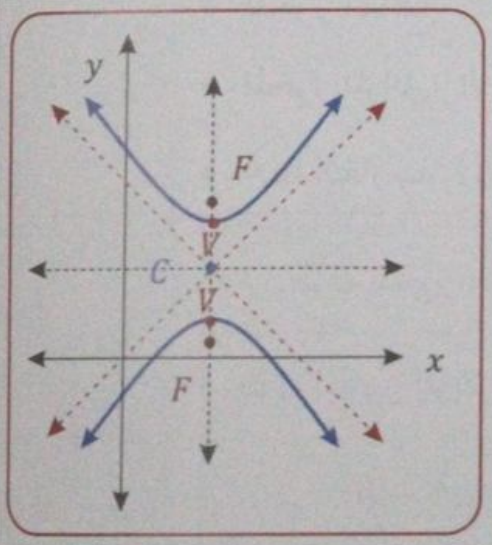
معادلته القياسية

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

a البعد بين المركز والرأس.
b نصف طول المحور المرافق.
(h,k) إحداثيا المركز.

خصائصه

- **الاتجاه:** المحور القاطع رأسي.
- **المركز:** $C(h,k)$.
- **الرأسان:** $V(h, k \pm a)$.
- **البؤرتان:** $F(h, k \pm c)$.
- **المحور القاطع:** $x = h$.
- **المحور المرافق:** $y = k$.
- **خطا التقارب:** $y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$.



علاقات مهمة

طول المحور القاطع « البُعد بين الرأسين » $= 2a$	
طول المحور المرافق $= 2b$	البُعد بين البؤرتين $= 2c$
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ أو $c^2 = a^2 + b^2$	

c البعد بين المركز والبؤرة.
a البعد بين المركز والرأس.
b نصف طول المحور المرافق.

مثال توضيحي

حدد خصائص القطع الزائد $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$.

أولاً: نُحدد خصائص القطع ..

- **الاتجاه:** رأسي « الحد المطروح منه يحوي y ».
- **المركز:** $(h,k) = (-1,-4)$.
- **الرأسان:** $(h, k \pm a) = (-1, -4 \pm 8)$.

$\therefore$ الرأسان $(-1,4), (-1,-12)$

- **البؤرتان:** $(h, k \pm c) = (-1, -4 \pm \sqrt{145})$.

$(-1, -4 + \sqrt{145}), (-1, -4 - \sqrt{145})$

- **المحور القاطع:** $x = h = -1$.
- **المحور المرافق:** $y = k = -4$.
- **خطا التقارب:** $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$ ..

$$y - (-4) = \pm \frac{8}{9}(x - (-1)) \Rightarrow y + 4 = \pm \frac{8}{9}(x + 1)$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

h	k	a	b	c
-1	-4	8	9	$\sqrt{145}$

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

المقصود به

الاختلاف المركزي e هو نسبة c الى a يُعطى بالعلاقة ..

$$e = \frac{c}{a}$$

c البعد بين المركز والبؤرة.
a البعد بين المركز والرأس.

مثال توضيحي

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$.

نُحدد قيمتي a, c ..

$$a^2 = 64 \Rightarrow a = \sqrt{64} = 8 \ , \ b^2 = 80 \ ,$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 80} = 12$$

نُوجد ـ الآن ـ الاختلاف المركزي e ..

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{8} = 1.5$$

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b} = 1$$

$$\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$$

الصورة العامة لمعادلة القطوع	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ حيث: A, B, C لا تساوي جميعها أصفاراً، و .. $\text{المميز} = B^2 - 4AC \ , \ B \neq 0$
تصنيف القطوع	

نوع القطع المخروطي	المميز
دائرة	$B^2 - 4AC < 0 \ , \ B = 0 \ , \ A = C$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0 \ , \ B \neq 0$ أو $A \neq C$
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله المعادلة $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$ دون كتابتها على الصورة القياسية « باستخدام المميز ».

نُعيد كتابة المعادلة لترتيبها ..

$-6x^2 + 8y^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

نُحدد ـ الآن ـ قيمة المميز ..

مقارنة المعادلة المعطاة بالصورة القياسية

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$-6x^2 + 4xy + 8y^2 - 6x + 2y - 4 = 0$

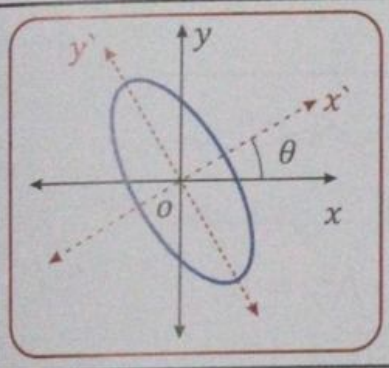
$A = -6 \ , \ B = 4 \ , \ C = 8$

$\text{المميز} = B^2 - 4AC = 4^2 - 4(-6)(8) = 208 > 0$

$\therefore$ المعادلة تمثل قطعًا زائدًا

دوران محاور القطوع المخروطية

المقصود به	دوران محوري القطع بزاوية θ بحيث لا توازي محاور الاحداثيات x, y
المستوى $x`y`$	المستوى الناتج من دوران المستوى xy بزاوية θ



كتابة معادلة القطوع في المستوى $x`y`$ بالدوران بزاوية حادة θ

الطريقة

نُحول معادلة القطع من الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ إلى الصورة $(x`)^2 + C(y`)^2 + Dx` + Ey` + F = 0$ باستخدام صيغتي الدوران التاليتين:

$x = x`\cos\theta - y`\sin\theta$	$y = x`\sin\theta + y`\cos\theta$

مثال توضيحي

استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x`y`$ ، ثم حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

بما أن المطلوب كتابة المعادلة في المستوى $x`y`$ فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$\boldsymbol{x = x`\cos\theta - y`\sin\theta}$	$\boldsymbol{y = x`\sin\theta + y`\cos\theta}$
$x = x`\cos\frac{\pi}{6} - y`\sin\frac{\pi}{6}$	$y = x`\sin\frac{\pi}{6} + y`\cos\frac{\pi}{6}$
$= x`\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - y`\left(\frac{1}{2}\right)$	$= x`\left(\frac{1}{2}\right) + y`\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{\sqrt{3}\,x` - y`}{2}$	$= \frac{x` + \sqrt{3}\,y`}{2}$

نعوض ـ الآن ـ عن x, y في المعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 60 = 0$ ..

$$7\left(\frac{\sqrt{3}\,x`-y`}{2}\right)^2 + 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}\,x`-y`}{2}\right)\left(\frac{x`+\sqrt{3}\,y`}{2}\right) + 3\left(\frac{x`+\sqrt{3}\,y`}{2}\right)^2 - 60 = 0$$

وبالفك ..

$$\frac{7\left(3x`^2-2\sqrt{3}\,x`y`+y`^2\right)}{4} + \frac{4\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\,x`^2+2x`y`-\sqrt{3}\,y`^2\right)}{4} + \frac{3\left(x`^2+2\sqrt{3}\,x`y`+3y`^2\right)}{4} = 60$$

وبالضرب في 4 ثم فك الأقواس ..

$$36(x`)^2 + 4(y`)^2 = 240$$

وبالقسمة على 240 والتبسيط ..

$$\frac{(x`)^2}{\frac{20}{3}} + \frac{(y`)^2}{60} = 1$$

معادلة القطوع في المستوى xy إذا عُلمت معادلته في المستوى $x`y`$ بزاوية دوران θ

الطريقة

نُحول معادلة القطع من الصورة $A(x`)^2 + C(y`)^2 + Dx` + Ey` + F = 0$ للصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ باستخدام صيغتي الدوران التاليتين:

$y` = y\cos\theta - x\sin\theta$	$x` = x\cos\theta + y\sin\theta$

اكتب معادلة القطع المكافئ $(x')^2 = 8y'$ في المستوى xy إذا كانت زاوية الدوران $\theta = 45°$.

بما أن المطلوب كتابة معادلة القطع في المستوى xy فإننا نستخدم صيغتي الدوران التاليتين:

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$	$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$
$x' = x\cos 45° + y'\sin 45°$ $= x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}$	$y' = y\cos 45° - x\sin 45°\, y$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}(y-x)}{2}$

مثال توضيحي

نعوض ـ الآن ـ عن x', y' في المعادلة $(x')^2 = 8y'$ ..

$$\left(\frac{\sqrt{2}(x+y)}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{\sqrt{2}(y-x)}{2}\right)$$

$$\frac{2(x^2+2xy+y^2)}{4} = 4\sqrt{2}\,y - 4x$$

وبالضرب في 4 ثم فك الأقواس ..

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 16\sqrt{2}\,y - 16x$$

وبالتبسيط تكون معادلة القطع في المستوى xy ..

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 16x - 16\sqrt{2}\,y = 0$$

المعادلات الوسيطية

المقصود بها	إذا كانت f, g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I فإن المعادلتين $x = f(t)$ و $y = g(t)$ تسميان المعادلتين الوسيطيتين للمنحنى الوسيط حيث: t المتغير الوسيط ، I الفترة الوسيطية.
المنحنى الوسيط	المنحنى الممثل بالأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$

كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

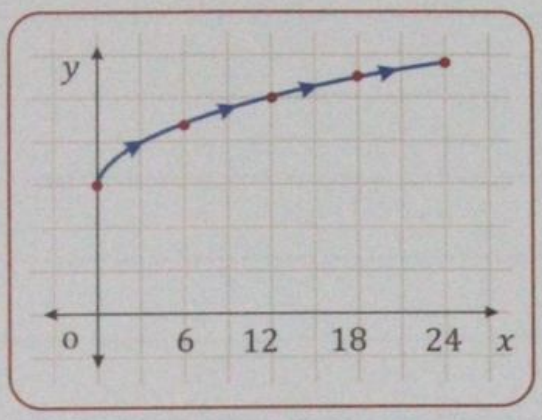
الطريقة	(1) نُوجد قيمة المتغير الوسيط t من أحد المعادلتين الوسيطيتين. (2) نُعوض بقيمة t في المعادلة الثانية لينتج الصورة الديكارتية.

مثال توضيحي

مثل بيانيًا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين $x = 3t\ ,\ y = \sqrt{t} + 6$ حيث $0 \le t \le 8$.

نكون جدولاً لقيم x, y بناءً على قيم t ثم نرسم المنحنى على شبكة التربيع كما يلي:

t	$x = 3t$	$y = \sqrt{t} + 6$	(x, y)
0	$3(0) = 0$	$\sqrt{0} + 6 = 6$	$(0, 6)$
2	$3(2) = 6$	$\sqrt{2} + 6 = 7.4$	$(6, 7.4)$
4	$3(4) = 12$	$\sqrt{4} + 6 = 8$	$(12, 8)$
6	$3(6) = 18$	$\sqrt{6} + 6 = 8.4$	$(18, 8.4)$
8	$3(8) = 24$	$\sqrt{8} + 6 = 8.8$	$(24, 8.8)$



حركة المقذوفات

المقصود بها

إذا قُذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق فإن ..

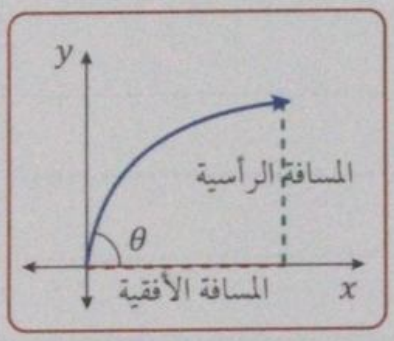
- **المسافة الأفقية x** : تعطى بالمعادلة ..

$$x = t\, v_0 \cos\theta \quad \text{المسافة الأفقية}$$

- **المسافة الرأسية y**: تعطى بالمعادلة ..

$$y = t\, v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 + h_0 \quad \text{المسافة الرأسية}$$

حيث: g الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الإبتدائي.



مثال توضيحي

ركلت كرة بسرعة 56 m/s وبزاوية مقدارها 12° مع الأفق؛ ما أقصى مسافة أفقية تقطعها؟

أولاً: نحصل على الزمن اللازم للوصول لأقصى مسافة أفقية ..

بما أن الكرة تصل لأقصى مسافة أفقية عندما تكون المركبة الرأسية تساوي الصفر فإن ..

$$y = t\, v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 + h_0 \quad \text{« المركبة الرأسية »}$$

$$0 = t\,(56)\sin 12^\circ - \frac{1}{2}(9.8)t^2 + 0 \quad « y = 0\ ,\ g = 9.8\ ,\ \theta = 12^\circ\ ,\ h_0 = 0 »$$

$$4.9t^2 - 11.64t = 0 \quad \text{« بسطنا »}$$

$$t(4.9t - 11.64) = 0 \quad \text{« أخرجنا العامل المشترك } t \text{ »}$$

وباستخدام خاصية الضرب الصفري نتوصل إلى أنه: **إما** $t = 0$ وهذا مرفوض، **أو** ..

$$4.9t - 11.64 = 0 \ \Rightarrow\ 4.9t = 11.64 \ \Rightarrow\ t = \frac{11.64}{4.9} \approx 2.38$$

ثانيًا: نُوجد أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة بالتعويض عن t بـ 2.38 ..

$$x = t\, v_0 \cos\theta = 2.38(56)\cos 12^\circ \approx \boxed{130\ \text{m}} \quad \text{المسافة الأفقية}$$