الفصل الأول: التبرير والبرهان

التخمين الرياضي

المقصود به	إصدار ادعاء عام « بهدف تعليمي » يرتكز على معطيات ومعلومات معروفة
التبرير الاستقرائي	عملية يتم من خلالها اختبار عدة مواقف محددة للوصول إلى ادعاء عام
المثال المضاد	• لنفي ادعاء أو تخمين يكفي إعطاء مثال يكون الادعاء فيه غير صحيح. • المثال الذي يكون فيه الادعاء غير صحيح يسمى **مثالاً مضاداً**.

العبارة

تعريفها	{ جملة خبرية إما صحيحة فقط « T » وإما خاطئة فقط « F » }	
رمزها	يرمز لها بأحد الرموز ... , B , A , q , p	
نفي العبارة	• نفي العبارة الصائبة عبارة خاطئة، ونفي العبارة الخاطئة عبارة صائبة. • إذا كان رمز عبارة ما p فإن رمز نفيها ~p « تُقرأ نفي p ».	
نوعا العبارات	بسيطة	مركبة
	تحوي خبراً واحداً فقط	تحوي أكثر من خبر
	قياس الزاوية المستقيمة 180°	للمربع أربعة أضلاع ومجموع قياس زواياه الداخلية 360°

قيم الصدق وجدول الصدق

قيم الصدق لعبارة

قيم الصدق الممكنة لأيّ عبارة هي الصواب « T » أو الخطأ « F »

p
T
F

جدول الصدق لعبارتين

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

جدول الصدق لعبارة ونفيها

p	~p
T	F
F	T

عبارتا الوصل والفصل

المقصود بعبارتي الوصل والفصل

العبارة	أداة الربط	المثال	بالرموز
عبارة الوصل	وَ	الشمس غائبة وَ الوقت ليل	$p \wedge q$
عبارة الفصل	أو	الشمس غائبة أو الوقت ليل	$p \vee q$

جدولا الصدق لهما

عبارة الوصل تكون صائبة في حالة واحدة فقط .. عندما p و q صائبتان معاً

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

عبارة الفصل تكون خاطئة في حالة واحدة فقط .. عندما p و q خاطئتان معاً

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

العبارة الشرطية

المقصود بها	العبارة « إذا كان ... فإن ... » تسمى عبارة شرطية
رمزها	$p \rightarrow q$ « وتقرأ إذا كان p فإن q »
الفرض والنتيجة	الجملة التي بعد « إذا كان » تسمى الفرض، والجملة التي بعد « فإن » تسمى النتيجة
مثال توضيحي	إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن زواياه متطابقة

جدول الصدق للعبارة الشرطية

تكون خاطئة في حالة واحدة فقط إذا كان الفرض صحيحاً و النتيجة خاطئة

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	مكوناتها	الرمز	مثال
الشرطية	فرض معطى ونتيجة	$p \to q$	إذا تساوى قياس زاويتين فإنهما متطابقتان
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \to p$	إذا تطابقت زاويتان فإن لهما القياس نفسه
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة	$\sim p \to \sim q$	إذا كان قياسا زاويتين غير متساويين فإنهما غير متطابقتين
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية	$\sim q \to \sim p$	إذا كانت الزاويتان غير متطابقتين فإن قياسيهما غير متساويين

العبارة الشرطية الثنائية

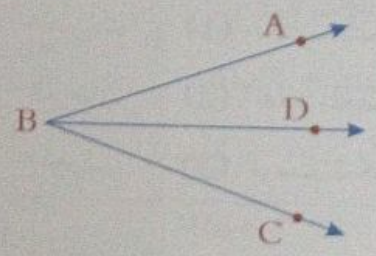
المقصود بها	ربط بين عبارة شرطية وعكسها بأداة الربط وَ
رمزها	$(p \to q) \wedge (q \to p)$ واختصاراً $(p \leftrightarrow q)$ وتقرأ « p إذا وفقط إذا q »
قيمة الصدق	تكون العبارة الشرطية الثنائية **صائبة** عندما تكون العبارة الشرطية وعكسها **صائبتين**
مثال توضيحي	تتطابق الزاويتان إذا وفقط إذا كان لهما القياس نفسه

التبرير الاستنتاجي

تعريفه	{ **عملية الاستنتاج باستخدام حقائق أو قواعد أو تعاريف للوصول إلى نتائج منطقية** }
مثال توضيحي	عملية الاستنتاج التي يتبعها الأطباء في تحديد عيار الجرعة من الدواء للمرضى
من أنواع التبرير الاستنتاجي	• قانون الفصل المنطقي. • قانون القياس المنطقي.

قانون الفصل المنطقي

استعماله	يُستعمل للحصول على النتائج من عبارات شرطية صحيحة
القانون	إذا كانت العبارة الشرطية $p \to q$ صحيحة والفرض p صحيحاً فإن النتيجة q صحيحة وبالرموز .. $[(p \to q) \wedge p] \to q$

مثال توضيحي	لتكن العبارة الشرطية « إذا كان نصف المستقيم منصفاً لزاوية فإنه يقسمها إلى زاويتين متطابقتين » صحيحة فحدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أو خاطئة بناءً على المعطيات .. المعطيات: $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$. النتيجة: $\angle ABD \cong \angle CBD$. الحل: النتيجة صحيحة؛ لأن العبارة الشرطية المعطاة صحيحة والفرض صحيح. 

قانون القياس المنطقي

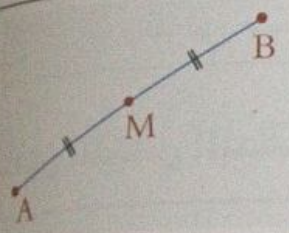
استعماله	يُستعمل للحصول على النتائج، وهو يشبه أن علاقة المساواة متعدية
القانون	إذا كانت العبارتان الشرطيتان $q \to r$ و $p \to q$ صحيحتين فإن العبارة الشرطية $p \to r$ صحيحة وبالرموز .. $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
مثال توضيحي	إذا كان $2x = 14$ فإن $x = 7$ وإذا كان $x = 7$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$ ومنه فإنه .. إذا كان $2x = 14$ فإن $\frac{1}{x} = \frac{1}{7}$

المسلمات

المسلمة	عبارة تقبل على أنها صحيحة
مسلمات النقاط والمستقيمات والمستويات	(1) كل نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم واحد. (2) كل ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد يمر بها مستوى واحد. (3) كل مستقيم يحوي نقطتين على الأقل. (4) كل مستوى يحوي على الأقل ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة. (5) إذا وقعت نقطتان في مستوى فإن المستقيم الوحيد المار بالنقطتين يقع كلياً في المستوى. (6) إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإن تقاطعهما نقطة واحدة. (7) إذا تقاطع مستويان فإن تقاطعهما مستقيم.

البرهان الحر

النظرية	تستخدم لإثبات صحة عبارة أو تخمين باستعمال المفردات المعرفة والمسلمات والخصائص الجبرية للمساواة

البرهان	دليل منطقي تُكتب فيه كل عبارة مُبررة بعبارة سبق إثبات صحتها
البرهان الحر	كتابة فقرة يُوضح فيها لماذا يكون التخمين لوضع معطى صحيحاً
خطوات البرهان الجيد	(1) نكتب التخمين المراد إثباته. (2) نحدد المعطيات. (3) نرسم شكلاً توضيحياً للمعطيات إن أمكن. (4) نحدد المطلوب إثباته. (5) نبني البرهان بالتبرير الاستنتاجي.
نظرية نقطة المنتصف	إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ فإن .. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ 

البرهان ذو العمودين

المقصود به	برهان يحوي العبارات مرتبة في عمود والتبريرات مرتبة في عمود موازٍ له
المناقشة الاستنتاجية	{ مجموعة الخطوات الجبرية التي تُستعمل لحل المسائل والمعادلات باستخدام خصائص علاقة المساواة }

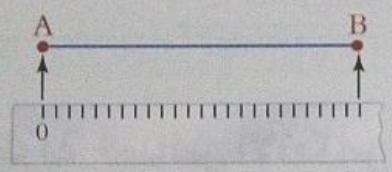
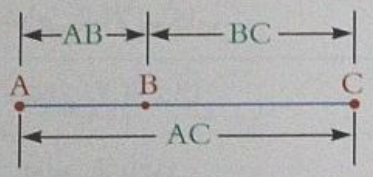
بعض خصائص الأعداد الحقيقية

خاصية الانعكاس	$a = a$
خاصية التماثل	إذا كان $a = b$ فإن $b = a$
خاصية التعدي	إذا كان $a = b$ و $b = c$ فإن $a = c$
خاصية الجمع	إذا كان $a = b$ فإن $a+c = b+c$
خاصية الطرح	إذا كان $a = b$ فإن $a-c = b-c$
خاصية الضرب	إذا كان $a = b$ فإن $c.a = c.b$
خاصية القسمة	إذا كان $a = b$ و $c \neq 0$ فإن $\frac{b}{c} = \frac{a}{c}$
خاصية التعويض	إذا كان $a = b$ فإن a تحل مكان b في أي معادلة أو أي مقدار جبري
خاصية التوزيع	$a(b+c) = ab+ac$
تنبيه	• الخصائص السابقة صحيحة لأي ثلاثة أعداد حقيقية a , b , c . • البرهان الهندسي: برهان يستخدم خصائص الأعداد الحقيقية في إثبات العلاقات بين قياسات الزوايا وأطوال القطع المستقيمة.

خصائص أطوال القطع المستقيمة وقياسات الزوايا

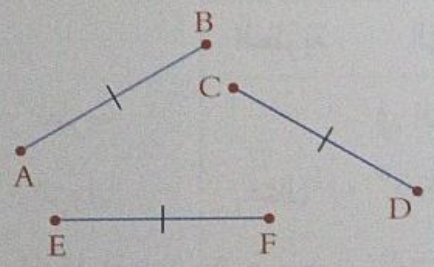
الخاصية	أطوال القطع المستقيمة	قياسات الزوايا
الانعكاس	$AB = AB$	$m\angle 1 = m\angle 1$
التماثل	إذا كان $AB = CD$ فإن $CD = AB$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ فإن $m\angle 2 = m\angle 1$
التعدي	إذا كان $AB = CD$ و $CD = EF$ فإن $AB = EF$	إذا كان $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 2 = m\angle 3$ فإن $m\angle 1 = m\angle 3$

مسلمتا المسطرة وجمع القطع المستقيمة

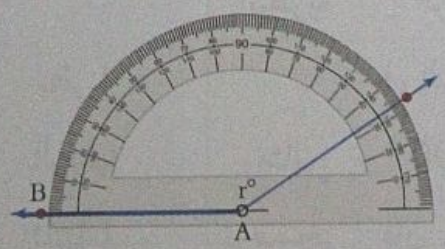
مسلمة المسطرة	النقاط التي تقع على مستقيم أو قطعة مستقيمة يمكن ربطها بأعداد حقيقية، بحيث تقابل النقطة A ـ مثلاً ـ الصفر، بينما تقابل النقطة الثانية B عدداً حقيقياً موجباً	
مسلمة جمع القطع المستقيمة	إذا وقعت النقاط A , B , C على استقامة واحدة وكانت النقطة B بين A , C فإن $AB+BC = AC$ والعكس صحيح	

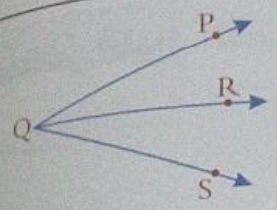
نظرية خواص تطابق القطع المستقيمة

خاصية الانعكاس	$\overline{AB} \cong \overline{AB}$
خاصية التماثل	إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ فإن $\overline{CD} \cong \overline{AB}$
خاصية التعدي	إذا كانت $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ فإن $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

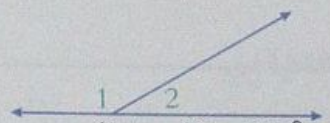
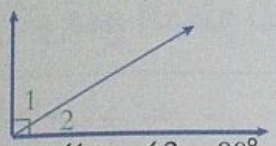


مسلمتا المنقلة وجمع الزوايا

مسلمة المنقلة	إذا كان $\overrightarrow{AB}$ نصف مستقيم معطى والعدد r بين 0 و 180 فإنه يوجد نصف مستقيم وحيد طرفه النقطة A ويقع في إحدى جهتي $\overrightarrow{AB}$ بحيث أن قياس الزاوية المتكونة يساوي r	

مسلمة جمع الزوايا	إذا وقعت النقطة R داخل $\angle PQS$ فإن .. $m\angle PQR + m\angle RQS = m\angle PQS$ والعكس صحيح.	

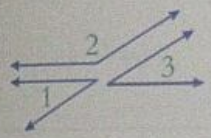
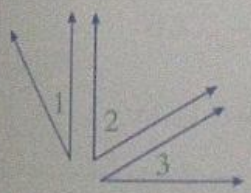
نظريات الزوايا المتكاملة والزوايا المتتامة

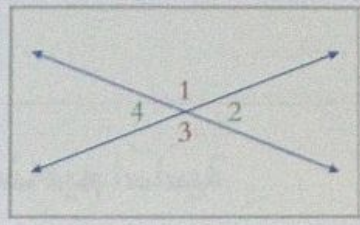
تكامل الزوايا	تتام الزوايا
إذا كانت زاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما متكاملتان	إذا شكّل الضلعان غير المشتركين لزاويتين متجاورتين زاوية قائمة فإن الزاويتين متتامتان
 $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$	 $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$

نظرية خصائص الانعكاس والتماثل والتعدي للزوايا

خاصية الانعكاس	$\angle 1 \cong \angle 1$
خاصية التماثل	إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ فإن $\angle 1 \cong \angle 2$
خاصية التعدي	إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 3 \cong \angle 2$ فإن $\angle 1 \cong \angle 3$

نظريات تطابق الزوايا

نظرية الزوايا المتكاملة	النظرية	الزاويتان المكملتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين
	مثال توضيحي	في الشكل المجاور: إذا كان .. $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 180^\circ$ فإن .. $\angle 1 \cong \angle 3$
		
نظرية الزوايا المتتامة	النظرية	الزاويتان المتممتان للزاوية نفسها أو لزاويتين متطابقتين تكونان متطابقتين
	مثال توضيحي	في الشكل المجاور: إذا كان .. $m\angle 1 + m\angle 2 = 90^\circ$ و $m\angle 3 + m\angle 2 = 90^\circ$ فإن .. $\angle 1 \cong \angle 3$
		

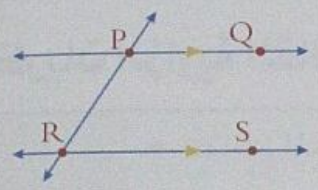
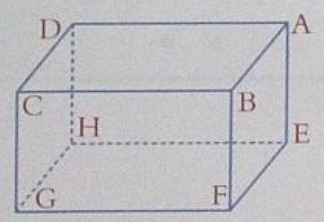
نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس	النظرية	الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان	
	مثال	في الشكل المجاور ..	
	توضيحي	$\angle 1 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 4$	

نظريات الزاوية القائمة

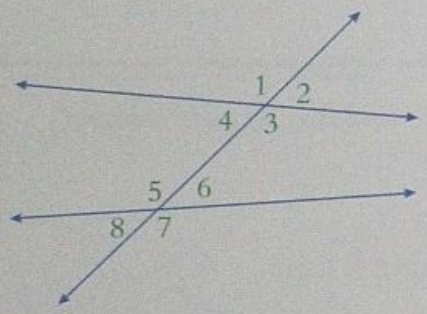
نظريات الزاوية القائمة	• تتقاطع المستقيمات المتعامدة وتُشكِّل أربع زوايا **قائمة**. • جميع الزوايا **القائمة** متطابقة. • المستقيمات **المتعامدة** تُشكِّل زوايا متجاورة ومتطابقة. • إذا كانت الزاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإنهما **قائمتان**. • إذا كانت الزاويتان المتطابقتان متجاورتين على مستقيم فإنهما **قائمتان**.

الفصل الثاني: التوازي والتعامد

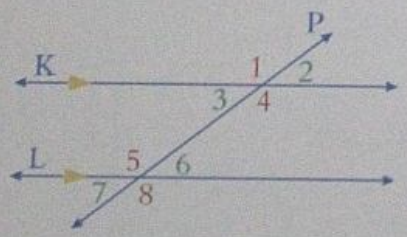
مفاهيم أساسية

المستقيمان المتوازيان	هما مستقيمان في مستوى واحد لا يتقاطعان أبداً؛ ففي الشكل المجاور $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ مستقيمان متوازيان وبالرموز $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$	
المستقيم المستعرض « القاطع »	مستقيم يقطع مستقيمين متوازيين « أو غير متوازيين » أو أكثر في مستوى واحد؛ وبالرموز $\overleftrightarrow{PR}$ مستقيم مستعرض للمستقيمين $\overleftrightarrow{RS}$ و $\overleftrightarrow{PQ}$	
المستويان المتوازيان	مستويان لا يتقاطعان	
مثال توضيحي	المستوى ABCD يوازي المستوى EFGH	
المستقيمان المتخالفان	مستقيمان لا يقعان في مستوى واحد وغير متقاطعين	
مثال توضيحي	$\overleftrightarrow{AE}$ و $\overleftrightarrow{GF}$ مستقيمان متخالفان	

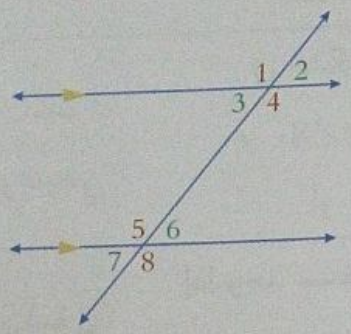
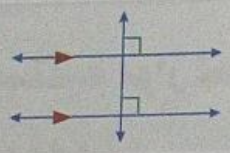
المستقيمات المستعرضة والزوايا

الاسم	الزوايا	الرسم
الزوايا الخارجية	$\angle 8$ و $\angle 7$ و $\angle 2$ و $\angle 1$	
الزوايا الداخلية	$\angle 6$ و $\angle 5$ و $\angle 4$ و $\angle 3$	
الزاويتان الداخليتان المتخالفتان	$\angle 4$ و $\angle 5$ أو $\angle 3$ و $\angle 6$	
الزاويتان الخارجيتان المتبادلتان	$\angle 2$ و $\angle 8$ أو $\angle 1$ و $\angle 7$	
الزاويتان الداخليتان المتبادلتان	$\angle 4$ و $\angle 6$ أو $\angle 3$ و $\angle 5$	
الزاويتان المتناظرتان	$\angle 5$ و $\angle 1$ أو $\angle 6$ و $\angle 2$	

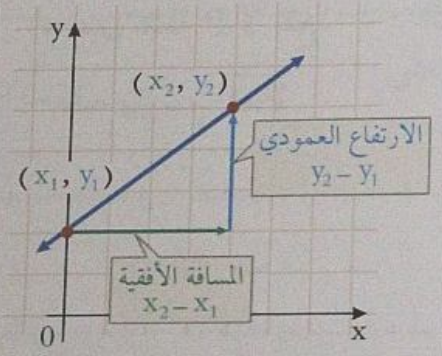
مسلمة الزاويتان المتناظرتان

المسلمة	إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتين	
توضيح بالرموز	إذا كان $K \parallel L$ و P قاطع لهما فإن $\angle 5 \cong \angle 1$ و $\angle 6 \cong \angle 2$ و $\angle 7 \cong \angle 3$ و $\angle 8 \cong \angle 4$	

نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

النظرية	الأمثلة	النموذج
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متبادلتين متطابقتان	$\angle 4 \cong \angle 5$ $\angle 3 \cong \angle 6$	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين متخالفتين متكاملتان	$\angle 6$ و $\angle 4$ متكاملتان $\angle 3$ و $\angle 5$ متكاملتان	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين خارجيتين متبادلتين متطابقتان	$\angle 1 \cong \angle 8$ $\angle 2 \cong \angle 7$	
نظرية القاطع المستعرض العمودي: في مستوى؛ إذا كان المستقيم عمودياً على أحد مستقيمين متوازيين فإنه يكون عمودياً على الآخر		

ميل المستقيم

تعريفه	{ نسبة ارتفاعه العمودي إلى المسافة الأفقية }	
إيجاده بمعلومية نقطتين عليه	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$	
فائدتان	• ميل المستقيم الرأسي غير مُعرَّف. • ميل المستقيم الأفقي يساوي الصفر.	

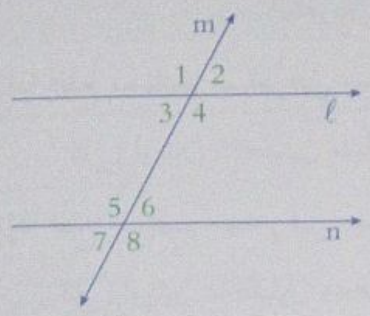
مسلمتا المستقيمات المتوازية والمتعامدة

مسلمة 1	يكون للمستقيمين غير الرأسيين **الميل نفسه** إذا وفقط إذا كانا **متوازيين**
مسلمة 2	يكون المستقيمان غير الرأسيين **متعامدين** إذا وفقط إذا كان حاصل **ضرب ميليهما** = -1

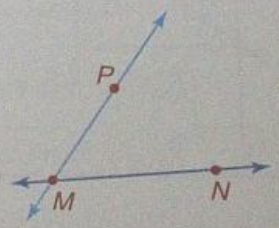
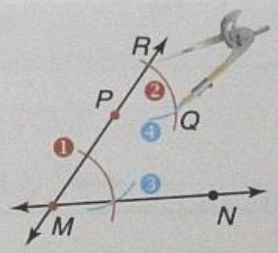
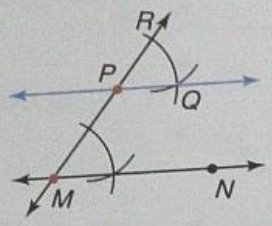
معادلة المستقيم

بمعلومية الميل والمقطع الصادي	$y = mx + b$	m ميل المستقيم b المقطع الصادي
بمعلومية الميل ونقطة عليه	$y - y_1 = m(x - x_1)$	m ميل المستقيم (x_1, y_1) نقطة يمر بها المستقيم
بمعلومية نقطتين عليه	$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	(x_2, y_2) و (x_1, y_1) نقطتان يمر بهما المستقيم

توازي المستقيمات

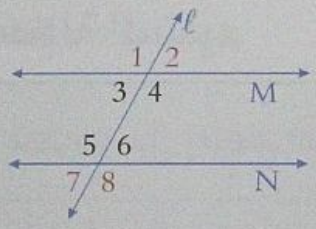
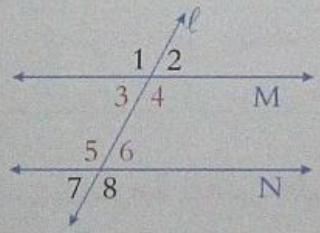
مسلمة 1	إذا قطع قاطع مستعرض مستقيمين في مستوى وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور إذا كان $m\angle 3 \cong m\angle 7$ أو $m\angle 4 \cong m\angle 8$ أو $m\angle 2 \cong m\angle 6$ أو $m\angle 1 \cong m\angle 5$ فإن $\ell \parallel n$	
مسلمة 2	إذا وجد مستقيم معلوم ونقطة لا تقع عليه فإنه يوجد مستقيم واحد فقط يمر بتلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم	

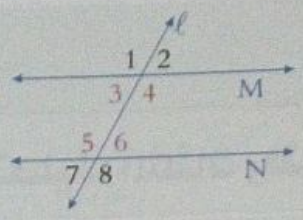
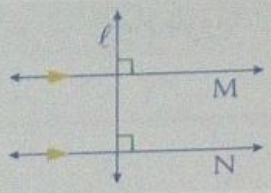
رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم ويمر بنقطة لا تقع عليه

الخطوة 1	الخطوة 2	الخطوة 3
نرسم $\overleftrightarrow{MN}$ بالمسطرة ثم نعين نقطة P لا تقع عليه ونرسم $\overleftrightarrow{PM}$	ننقل $\angle PMN$ بحيث تكون النقطة P رأس الزاوية الجديدة ونسمي نقطتي التقاطع Q و R	نرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ ؛ وبما أن $\angle RPQ \cong \angle PMN$ وهما متناظرتان فإن $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{MN}$
		

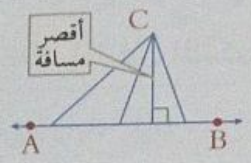
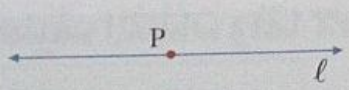
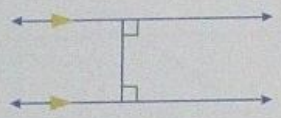
❶❷ نفس قياس الفرجار، ❸❹ نفس قياس الفرجار

نظريات إثبات توازي مستقيمان

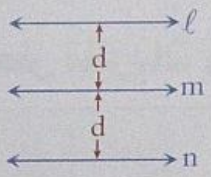
النظرية	أمثلة	شكل توضيحي
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان خارجيتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كانت $\angle 1 \cong \angle 8$ أو $\angle 2 \cong \angle 7$ فإن $M \parallel N$	
إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان داخليتان متخالفتان متكاملتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كانت $\angle 5$ و $\angle 3$ متكاملتين أو $\angle 6$ و $\angle 4$ متكاملتين فإن $M \parallel N$	

إذا قطع مستقيم مستعرض مستقيمين في مستوى، وكانت زاويتان داخليتان متبادلتان متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان	إذا كان $\angle 6 \cong \angle 3$ أو $\angle 4 \cong \angle 5$ فإن $M \parallel N$	
في المستوى؛ إذا كان مستقيمان عموديين على مستقيم واحد فإنهما متوازيان	إذا كان $\ell \perp M$ و $\ell \perp N$ فإن $M \parallel N$	

مفاهيم أساسية على الأعمدة والمسافات

البُعد بين مستقيم ونقطة لا تقع عليه	{ طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة }	
تنبيه	إذا كانت النقطة P تقع على المستقيم ℓ فإن البعد بين النقطة P والمستقيم ℓ يساوي الصفر	
البُعد بين مستقيمين متوازيين	{ البعد بين أحد المستقيمين المتوازيين وأي نقطة على المستقيم الآخر }	

نظرية المستقيمين المتوازيين

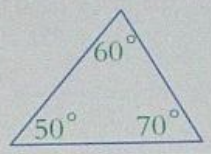
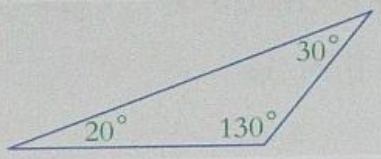
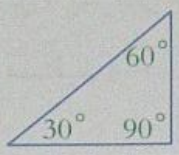
نظرية	في المستوى: المستقيمان اللذان يبعد كل منها بعداً ثابتاً عن مستقيم ثالث يكونان متوازيان	
وبالرموز	إذا كان بُعد كل من المستقيمين n و ℓ عن المستقيم m يساوي d فإن $\ell \parallel n$	

الشروط الضرورية الكافية

الشرط الضروري	يكون الشرط A ضرورياً للشرط B إذا وفقط إذا كان خطأ الشرط A أو عدم توافره يؤدي إلى خطأ الشرط B أو عدم توافره
مثال توضيحي	أن يكون الشكل رباعياً شرط ضروري لكي يكون الشكل مستطيلاً
الشرط الكافي	يكون الشرط A كافياً للشرط B إذا وفقط إذا كانت صحة الشرط A أو توافره تؤدي إلى صحة الشرط B أو توافره
مثال توضيحي	أن يكون العدد أقل من 15 شرط كافٍ لكي يكون العدد أقل من 20

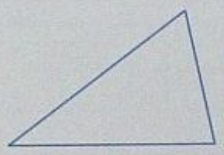
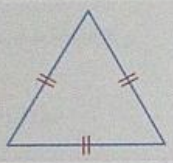
الفصل الثالث: تطابق المثلثات

تصنيف المثلثات وفقاً لزواياها

حاد الزوايا	منفرج الزاوية	قائم الزاوية
		
زواياه كلها حادة	يحوي زاوية واحدة منفرجة	يحوي زاوية واحدة قائمة
قياس كل زاوية أقل من 90°	**قياسها أكبر من 90°**	**قياسها يساوي 90°**

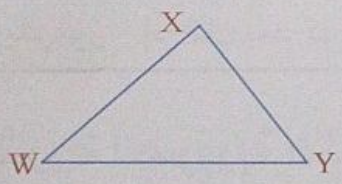
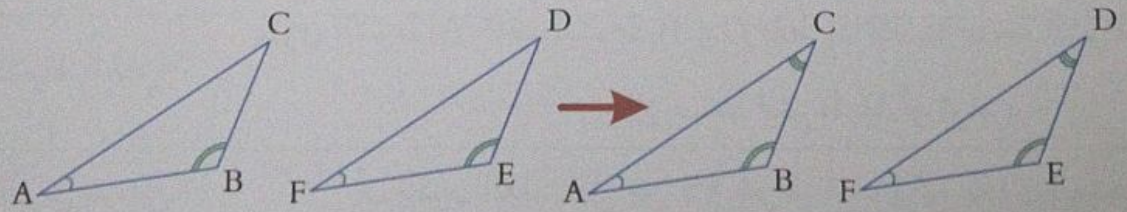
فائدة: إذا كان المثلث حاد الزوايا وجميع زواياه متطابقة فإنه يُسمى **مثلثاً متطابق الزوايا**، وقياس كل زاوية من زواياه 60° .

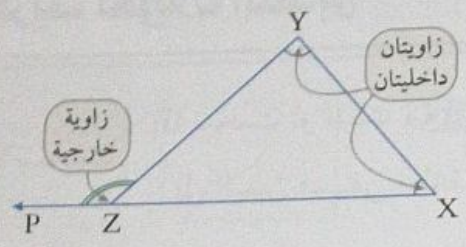
تصنيف المثلثات وفقاً لأضلاعها

مختلف الأضلاع	متطابق الضلعين	متطابق الأضلاع
		
الأضلاع غير متطابقة	يوجد على الأقل ضلعان متطابقان	الأضلاع متطابقة كلها

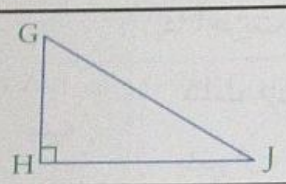
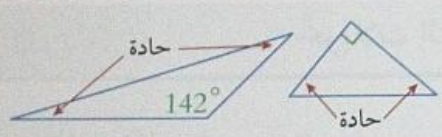
فائدة: المثلث متطابق الأضلاع جميع زواياه متطابقة وقياس كل زاوية 60° .

بعض نظريات زوايا المثلث

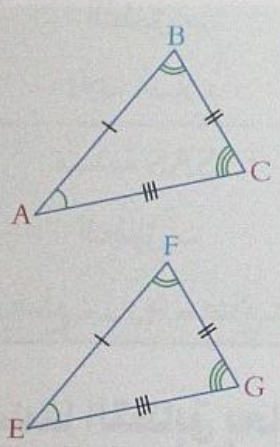
نظرية مجموع زوايا المثلث	مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية يساوي 180°	
مثال توضيحي	$m\angle W + m\angle X + m\angle Y = 180^\circ$	
نظرية الزاوية الثالثة	إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر	
مثال توضيحي	إذا كانت $\angle A \cong \angle F$ و $\angle B \cong \angle E$ فإن $\angle C \cong \angle D$ 	

الزاوية الخارجية	كل زاوية في المثلث لها زاوية خارجية تتكون من ضلع في المثلث مع امتداد ضلع آخر	
نظرية الزاوية الخارجية	قياس الزاوية الخارجية لمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين	
مثال توضيحي	$m\angle X + m\angle Y = m\angle YZP$	

نتائج

نتيجة 1	الزاويتان الحادتان في المثلث قائم الزاوية متتامتان	
مثال توضيحي	$m\angle G + m\angle J = 90^\circ$	
نتيجة 2	في أي مثلث توجد على الأكثر زاوية قائمة واحدة أو زاوية منفرجة واحدة	

تطابق المثلثات

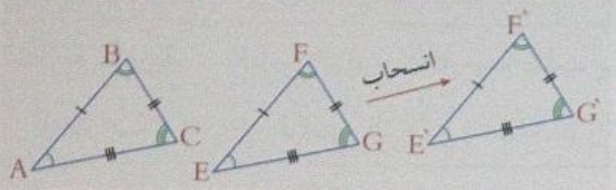
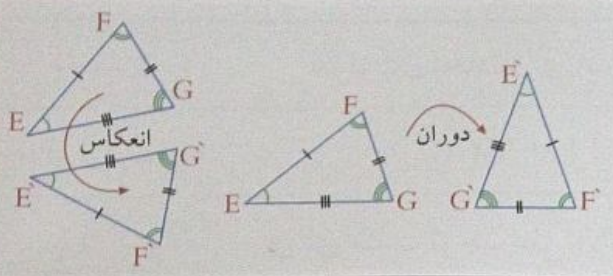
تطابق مثلثين	يتطابق المثلثان إذا وفقط إذا تطابقت أجزاؤهما المتناظرة	
مثال توضيحي	إذا كان ΔABC يطابق ΔEFG فإن رؤوس المثلثين تتناظر حسب ترتيبها ويمكن تحديد الأضلاع والزوايا المتناظرة المتطابقة وذلك باتباع الأحرف حسب ترتيبها كالتالي:	

الزوايا	$\angle C \cong \angle G$	$\angle B \cong \angle F$	$\angle A \cong \angle E$
الأضلاع	$\overline{AC} \cong \overline{EG}$	$\overline{BC} \cong \overline{FG}$	$\overline{AB} \cong \overline{EF}$

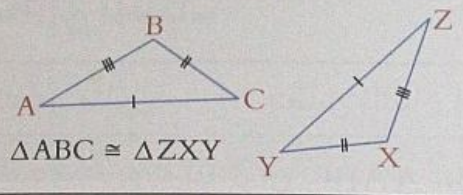
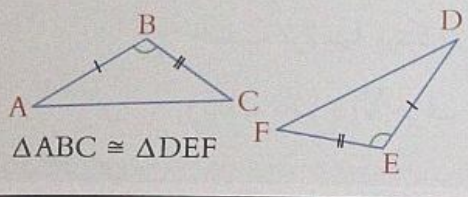
خصائص تطابق المثلثات

الانعكاس	$\Delta JKL \cong \Delta JKL$
التماثل	إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ فإن $\Delta PQR \cong \Delta JKL$
التعدي	إذا كان $\Delta JKL \cong \Delta PQR$ و $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ فإن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$

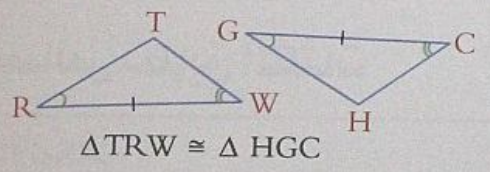
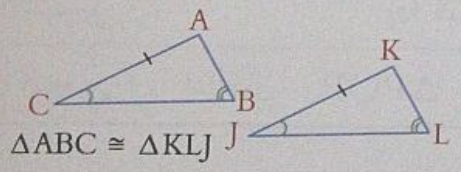
تعريف تحويلات التطابق

الانسحاب	إذا سحبْتَ أو نقلْتَ ΔEFG إلى أعلى ثم إلى اليمين فسيبقى مطابقاً لـ ΔABC	
الانعكاس	لا يتأثر تطابق المثلثين بتحويل الانعكاس	
الدوران	لا يتأثر تطابق المثلثين بتحويل الدوران	
تنبيه	إذا أجريتَ انسحاباً أو انعكاساً أو دوراناً لمثلث فإن قياسات المثلث وشكله لا يتغيران، وتسمى التحويلات الثلاثة **تحويلات التطابق**	

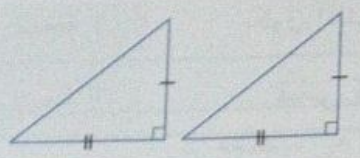
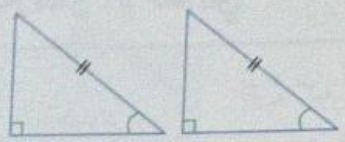
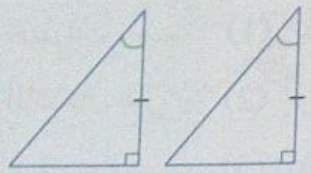
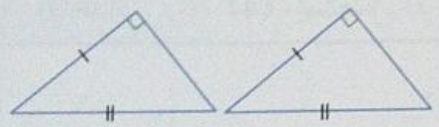
مسلمتا التطابق بحالتي SSS و SAS

مسلمة SSS التطابق بـ « ثلاثة أضلاع »	إذا تطابقت أضلاع مثلث مع أضلاع مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	
مسلمة SAS التطابق بـ « ضلع ـ زاوية ـ ضلع »	إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	

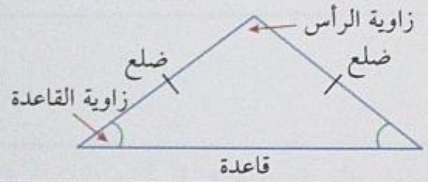
مسلمتا التطابق بحالتي ASA و AAS

مسلمة ASA التطابق بـ « زاوية ـ ضلع ـ زاوية »	إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر فإن المثلثين متطابقان	
مسلمة AAS التطابق بـ « زاوية ـ زاوية ـ ضلع »	إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين	

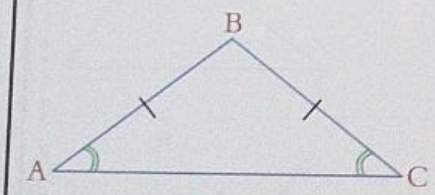
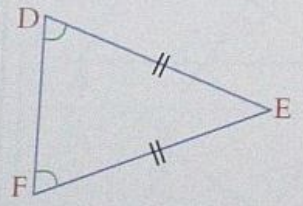
نظريات تطابق المثلثات القائمة الزاوية

نظرية التطابق بـ « ساق - ساق » « LL »	إذا تطابق ساقا مثلث قائم الزاوية مع ساقي مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
نظرية التطابق بـ « وتر - زاوية » « HA »	إذا تطابق وتر وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
نظرية التطابق بـ « ساق - زاوية » « LA »	إذا تطابق ساق وإحدى الزاويتين الحادتين في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	
مسلمة التطابق بـ « وتر - ساق » « HL »	إذا تطابق وتر وساق في مثلث قائم الزاوية مع نظائرهما في مثلث آخر قائم الزاوية يكون المثلثان متطابقين	

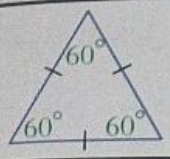
خصائص المثلث متطابق الضلعين

زاوية الرأس	الزاوية المكونة من الضلعين المتطابقين	
زاوية القاعدة	الزاوية المكونة من القاعدة وأحد الضلعين المتقابلين	

نظريات المثلث متطابق الضلعين

نظرية 1	إذا تطابق ضلعان في مثلث فإن الزاويتين المقابلتين لهذين الضلعين متطابقتان	
مثال توضيحي	إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ فإن $\angle A \cong \angle C$	
نظرية 2	إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين متطابقان	
مثال توضيحي	إذا كانت $\angle D \cong \angle F$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$	

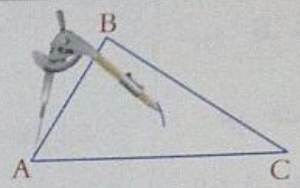
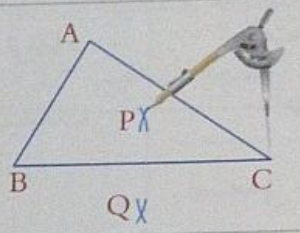
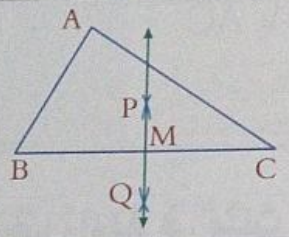
خصائص المثلث متطابق الأضلاع

نتيجة 1	يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا	
نتيجة 2	قياس كل زاوية في المثلث متطابق الأضلاع يساوي 60°	

البرهان الإحداثي

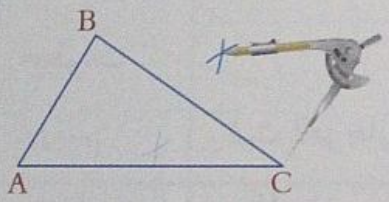
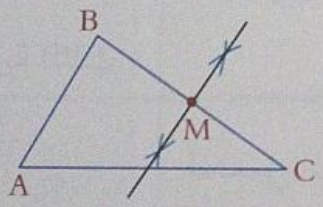
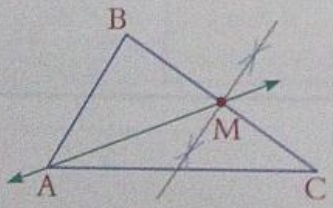
المقصود به	نوع من البراهين يستعمل الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية والخطوة الأولى فيه هي رسم الشكل على المستوى الإحداثي
خطوات رسم الأشكال على المستوى الإحداثي	(1) نضع رأس المضلع أو مركزه عند نقطة الأصل. (2) نرسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المضلع على أحد المحورين. (3) نضع المضلع في الربع الأول من المستوى الإحداثي إن أمكن. (4) نستعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

العمود المنصف لأحد أضلاع مثلث

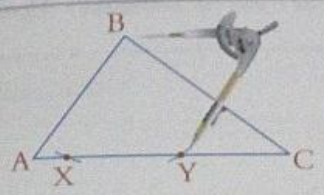
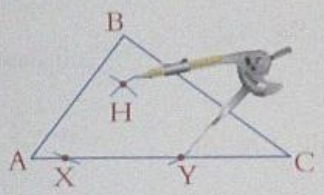
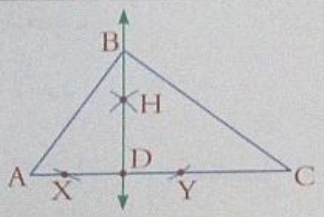
المقصود به	خط مستقيم عمودي على أحد أضلاع المثلث من منتصفه
خطوات رسم العمود المنصف لأحد أضلاع المثلث	ارسم مثلثاً ABC ثم افتح الفرجار بفتحة أكبر من $\frac{1}{2}AB$ وثبته عند الرأس A وارسم قوساً أعلى $\overline{AC}$ وآخر أسفله 
	استعمل الفتحة نفسها للفرجار وثبته عند الرأس C وارسم قوسين يقطعان القوسين السابقين، سمِّ نقطتي تقاطع القوسين P و Q 
	استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{PQ}$ ، سمِّ نقطة تقاطع $\overline{AC}$ مع $\overleftrightarrow{PQ}$ بالحرف M « نقطة التنصيف » 

فائدة: تستعمل هذه الطريقة لتنصيف أي قطعة مستقيمة.

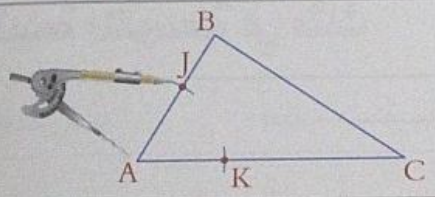
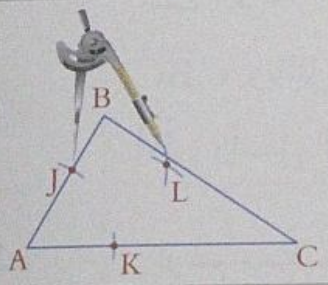
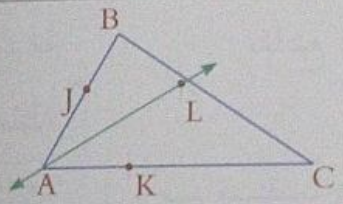
القطعة المتوسطة في مثلث

المقصود به	قطعة مستقيمة طرفاها أحد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع لذلك الرأس
خطوات رسم القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث	ثبت الفرجار عند B وارسم قوسين أعلى وأسفل الضلع $\overline{BC}$ ، وبالمثل ثبت الفرجار عند النقطة C وارسم قوسين أعلى وأسفل الضلع $\overline{BC}$ يتقاطعان مع القوسين السابقين 
	ارسم مستقيماً يمر بنقطتي تقاطع الأقواس ثم عيِّن نقطة تقاطع ذلك المستقيم مع $\overline{BC}$ وسمِّها M 
	ارسم مستقيماً يمر بالنقطتين A و M فتكون قطعة متوسطة للمثلث ABC 

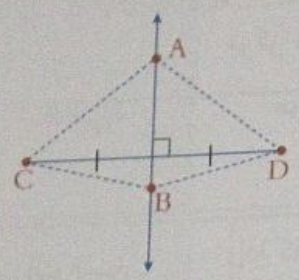
ارتفاع المثلث

المقصود به	عمود ساقط من أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل
خطوات رسم ارتفاع للمثلث	ثبت الفرجار في الرأس B وارسم قوسين يقطعان $\overline{AC}$ ، ثم سمِّ نقطي التقاطع X و Y تنبيه: قد تحتاج لمد $\overline{AC}$ إذا كان أقصر من دائرة الفرجار. 
	غير فتحة الفرجار إلى فتحة أكبر من $\frac{1}{2}XY$ وثبته في النقطة X وارسم قوساً أعلى $\overline{AC}$ ، ثم استعمل الفرجار بالفتحة نفسها وثبته في النقطة Y وارسم قوساً آخر أعلى ليقطع القوس الأول في نقطة سمِّها H 
	استعمل المسطرة لرسم $\overleftrightarrow{BH}$ وسمِّ نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{BH}$ مع $\overline{AC}$ بالحرف D ، فتكون $\overline{BD}$ هي ارتفاع المثلث ABC وعمودية على $\overline{AC}$ 

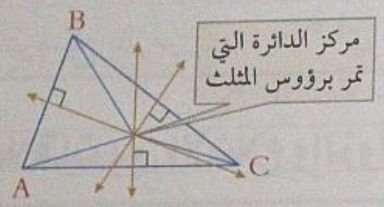
منصف زاوية في مثلث

المقصود به	نصف مستقيم يقسم زاوية المثلث إلى زاويتين متطابقتين
خطوات رسم منصف زاوية المثلث	ثبت الفرجار في الرأس A وارسم قوساً يقطع $\overline{AB}$ في K وقوساً آخر يقطع $\overline{AC}$ في J 
	ثبت الفرجار في J وارسم قوساً ثم ثبت الفرجار في K وارسم قوساً آخر يقطع القوس الأول في L 
	استعمل المسطرة لرسم $\overrightarrow{AL}$ ، فيكون $\overrightarrow{AL}$ منصفاً للزاوية ABC 

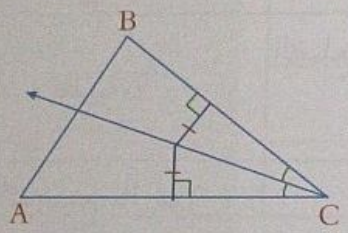
النقاط على الأعمدة المنصفة

نظرية 1	كل نقطة على العمود المنصف لقطعة مستقيمة تكون على بعدين متساويين من طرفي القطعة المستقيمة	
التوضيح بالرموز	إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ و $\overline{AB}$ تنصف $\overline{CD}$ فإن $AC = AD$ و $BC = BD$	
نظرية 2	كل نقطة تبعد بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيمة تقع على العمود المنصف لتلك القطعة	
التوضيح بالرموز	إذا كان $AC = AD$ فإن النقطة A تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$ وإذا كان $BC = BD$ فإن النقطة B تقع على العمود المنصف للقطعة المستقيمة $\overline{CD}$	

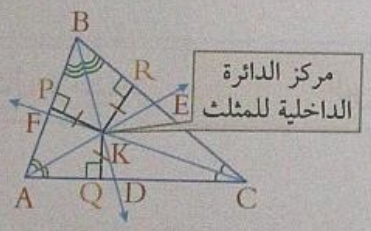
الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

ماذ يقصد بها؟	دائرة تمر برؤوس المثلث ومركزها نقطة تلاقي الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث	
نظرية مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث	مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث يبعد أبعاداً متساوية عن رؤوس المثلث	

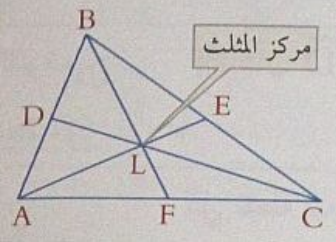
نظريات النقاط التي تقع على منصفات الزوايا

نظرية 1	كل نقطة تقع على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية	
نظرية 2	كل نقطة تقع على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية تقع على منصف الزاوية	

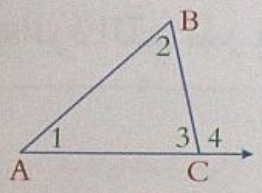
الدائرة الداخلية للمثلث

ماذا يقصد بها؟	دائرة تمس أضلاع المثلث من الداخل	
نظرية الدائرة الداخلية للمثلث	مركز الدائرة الداخلية للمثلث يكون على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث	
التوضيح بالرموز	إذا كان K مركز الدائرة الداخلية للمثلث PQR فإن $KQ = KR = KP$	

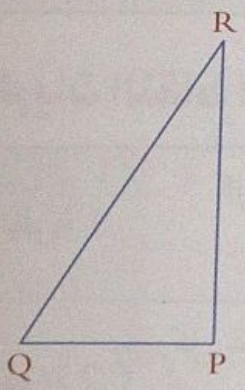
القطع المتوسطة ومركز المثلث

مركز المثلث	{ نقطة تقاطع متوسطات المثلث }	
النظرية	مركز المثلث يبعد عن كل رأس من رؤوس المثلث ثلثي طول القطعة المتوسطة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المجاور	
التوضيح بالرموز	إذا كان L مركز المثلث ABC فإن $AL = \frac{2}{3}AE$ و $BL = \frac{2}{3}BF$ و $CL = \frac{2}{3}CD$	

متباينة الزاوية الخارجية

النظرية	قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس كلٍ من قياس الزاويتين الداخليتين البعيدتين المناظرتين لها	
التوضيح بالرموز	أي أن $m\angle 4 > m\angle 2$ و $m\angle 4 > m\angle 1$	

العلاقات بين الأضلاع والزوايا في المثلث

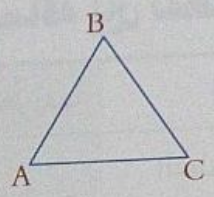
نظرية 1	الزاوية المقابلة للضلع الأطول في أي مثلث قياسها أكبر من قياس الزاوية المقابلة للضلع الأصغر فيه	
التوضيح بالرموز	إذا كان $RP > PQ$ فإن $m\angle Q > m\angle R$	
نظرية 2	الضلع المقابل للزاوية الكبرى في أي مثلث يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الصغرى فيه	
التوضيح بالرموز	إذا كان $m\angle Q > m\angle R$ فإن $RP > PQ$	

البرهان غير المباشر

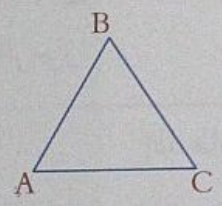
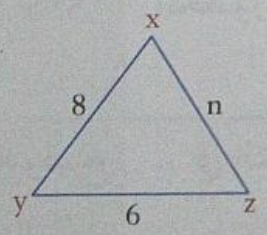
المقصود به	أحد أنواع البراهين؛ ونبدأ فيه بفرض أن النتيجة « المطلوب إثباتها » خاطئة ثم نثبت أن هذا الفرض يتناقض مع المعطيات أو أي حقيقة سابقة
مثال توضيحي	البرهان غير المباشر للعبارة $AB = MN$ يبدأ بالفرض $AB \neq MN$

خطوات كتابة البرهان غير المباشر	(1) نفرض أن النتيجة « المطلوب إثباتها » خاطئة. (2) نثبت أن هذا الافتراض يتناقض مع المعطيات. (3) نشير إلى أنه بسبب افتراض خطأ المطلوب حصلنا على عبارة غير صحيحة؛ لذا يجب أن يكون المطلوب صحيحاً.

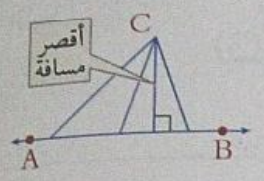
نظرية متباينة المثلث

النظرية	مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث	
التوضيح بالرموز	$AB+BC > AC$ $AC+BC > AB$ $AB+BC > AC$	
تنبيه	يمكن استخدام هذه النظرية في تحديد ما إذا كانت ثلاثة قطع مستقيمة يمكن أن تكوِّن مثلثاً أم لا	
مثال توضيحي	• الأعداد 2 و 5 و 4 تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن .. $5+2 > 4$ و $5+4 > 2$ و $4+2 > 5$ • الأعداد 8 و 4 و 3 لا تصلح أن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن: $4+3 \not> 8$.	
فائدة	للوصول للحل بأسرع طريقة نقارن مجموع طولي أصغر ضلعين بطول الضلع الثالث	

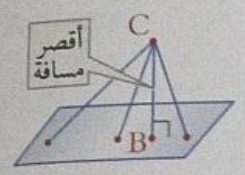
تحديد الطول المحتمل لضلع مثلث

التعبير اللفظي	طول أي ضلع في مثلث أكبر من الفرق الموجب بين طولي الضلعين الآخرين وأصغر من مجموع طوليهما	
التعبير الرمزي	$AB-AC < BC < AB+AC$	
تنبيه	لابد من تحقق المتباينة السابقة لجميع الأضلاع	
مثال توضيحي	في الشكل المجاور .. $8-6 < n < 8+6$ $2 < n < 14$ $\therefore$ الطول المحتمل $n \in (2,14)$	

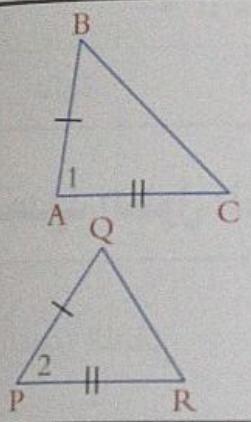
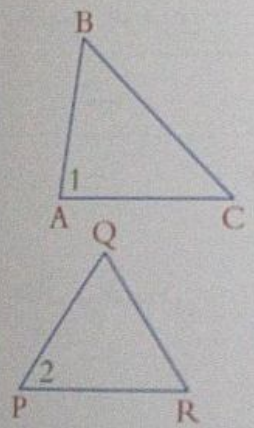
المسافة بين نقطة ومستقيم

تعريفها	{ طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستقيم }	
النظرية	القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستقيم هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستقيم	
تنبيه	إذا كانت النقطة تقع على المستقيم فإن المسافة بين النقطة والمستقيم تساوي الصفر	

المسافة بين نقطة ومستوى

تعريفها	{ طول القطعة المستقيمة العمودية من النقطة إلى المستوى }	
النتيجة	القطعة المستقيمة العمودية من نقطة إلى مستوى هي أقصر قطعة من تلك النقطة إلى ذلك المستوى	
تنبيه	إذا كانت النقطة تقع في المستوى فإن المسافة بين النقطة والمستوى تساوي صفر	

علاقة الأضلاع بالزاوية

متباينة SAS	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث آخر وكان قياس الزاوية المحصورة في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المحصورة في المثلث الثاني فإن الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني	
التوضيح بالرموز	في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{AB}$ و $\overline{PR} \cong \overline{AC}$ و $m\angle 1 > m\angle 2$ فإن $BC > QR$	
متباينة SSS	إذا طابق ضلعان في مثلث ضلعين في مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أطول من الضلع الثالث في المثلث الثاني فإن قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من قياس الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني	
التوضيح بالرموز	في الشكل المجاور: إذا كان $\overline{PQ} \cong \overline{AB}$ و $\overline{PR} \cong \overline{AC}$ و $BC > QR$ فإن $m\angle 1 > m\angle 2$	