سلسلة باالبيد التعليمية

استعداد

للاختبارات التحصيلية للكليات العلمية

نظري - بنين وبنات

يحتوي هذا الكتاب على
ملخص نظري للمفاهيم الأساسية
في الكيمياء والفيزياء والأحياء والرياضيات
والإنجليزي التي درسها الطالب في الثانوية العامة
بمستوياتها الثلاثة .

٦٠ ريال

سعيد عبدالله باالبيد

مقدمة

بسم الله والحمد لله والصلاة والسلام على رسول الله ..... أما بعد

إخواني الطلاب ... أخواتي الطالبات

تحية وتقدير نقدمها لكم على أمل أن تجدوا في هذا الكتاب المعلم والموجه الذي يعينكم على فهم كل صعب ويأخذ بأيديكم إلى طريق النجاح والتفوق .

وقد عملنا قدر استطاعتنا على أن يكون هذا الكتاب متضمناً جميع المواضيع الرئيسية في كتاب الكيمياء والفيزياء والأحياء والرياضيات والانجليزي

ونعتذر لطول هذا الكتاب لأنّ هذا الكتاب يستعرض الأفكار الرئيسية لأكثر من ٢٥ كتاب .

واخيراً باسم الفريق العلمي المشارك آمل أن ننال الأجر من الله على هذا العمل وأن يحوز على ثقة الجميع و أن نكون قد وفقنا في مساعدة الطلاب والطالبات في فهم جميع المواد بطريقة سهلة ومبسطة .

سعيد عبد الله بالبيد

في حالة وجود استفسار أو ملاحظة يرجى الاتصال على :

جوال ٠٥٥٥ ٢٢ ٦٤ ٢٢ مكتب + فاكس ٢٠٤ ٧٧ ١١

أو مراسلتنا على : balbaidseries@hotmail.com

لا تقلق من الاختبارات :

■ إنك إذا بذلت السبب ، فإنّ الله تعالى موزع الأرزاق ، ومتى ما استشعرت هذه الحقيقة فسوف تطمئن نفسك ، ويزول عنك الخوف والتوتر المبالغ فيه من الاختبارات.

■ إنه سبق لك التعرف على محتويات المواد خلال الأعوام السابقة ، فهي ليست أمراً مفاجئاً بالنسبة لك .

■ إن الاختبار ليس قضية حياة أو موت ، أو دليل إدانة للحكم على الطالب بالفشل ، واعلم أن كثير من النابغين لا يحملون المؤهلات العليا من التعليم، فإذا وفقت في اجتياز الاختبار فهو بتوفيق من الله ، وإذا لم تتمكن ، فليست نهاية المطاف او السبيل الوحيد للحياة.

نصائح عامة قبل الاختبار :

■ استعن بالله تعالى وتوكل عليه، وحافظ على أداء الصلاة في وقتها، وأكثر من الدعاء وكثرة الاستغفار ، والإحسان إلى الضعفاء ، كل ذلك من أسباب التوفيق .

■ كن متفائلاً ، قال الرسول ﷺ (تفاءلوا بالخير تجدوه) وقال جت كيرت (نحن في الواقع ما نتخيل أنفسنا به) بمعنى ان إذا تخيلت أنك إنسان ناجح فالنجاح حليفك . لهذا أخي الطالب فكر بالامتياز ولا تفكر بالمقبول ، فكر بالسهولة ولا تفكر بالصعوبة ، فكر أنك ذكي ولا تفكر أنك غبي .

■ اختر المكان المناسب للمذاكرة والذي يتوفر فيه ، النظافة والترتيب والهدوء، والإضاءة والتهوية الجيدة ، ولا بأس أن تفوح في المكان رائحة طيبة مع خلو المكان من الرسوم والصور الملفتة للانتباه، ومحاولة عدم الدراسة في غرف النوم أو في وضع الاستلقاء على الفراش؛ لأن ذلك يبعث على الاسترخاء والكسل أو الرغبة في النوم.

■ قم بعمل جدول لتقسيم وتوزيع فترات المذاكرة يومياً وخصص وقتاً للمراجعة إن أمكن ذلك، وتكون المذاكرة على فترتين في كل يوم.. كما هو موضح بالشكل التالي :

الوقت		الفترة الأولى	الفترة الثانية
الأيام	المادة	من – إلى	من – إلى
السبت			

■ استيقظ لصلاة الفجر وذاكر بعدها، فهذا الوقت أفضل أوقات المذاكرة وذلك لتوفر الهدوء والجو المناسب وصفاء الذهن، ويستحسن البدء في هذا الوقت بالمواد التي تحتاج لحفظ ، قال ﷺ : "اللهم بارك لأمتي في بكورها" الترمذي

■ قم بتلخيص كل صفحة بعد قراءة محتوياتها

■ لا تكترث بترهيب الآخرين من الاختبار، بل دعم نفسك بالمحفزات السارة ، وتذكر حياة الناجحين والطموحين ولا بأس من أخذ العظة من النمل في دأبه واجتهاده.

■ عليك بالإقلال من وسائل التسلية، والإقلال من الزيارات والنزهات ومتابعة التلفاز

■ لا بد من أن تهتم بغذائك بحيث يكون صحياً ومفيداً، وتكثر من تناول الخضروات الطازجة والفاكهة وتناول الحليب والعسل، والزبيب، والزعتر، والملفوف، واليانسون، وزيت الزيتون، وفيتامين (B٦ , B٢) فهي مفيدة للنشاط العقلي والصحي والحيوي وتقوية الذاكرة وزيادة الذكاء.

■ احرص على تناول وجبة الإفطار، وابتعد عن المنبهات الضارة كالشاي والقهوة، والتدخين، أو تناول المهدئات أو المنشطات ذات الأثر السلبي.

■ عند شعورك بالتعب الحقيقي فالأفضل عدم المقاومة والخلود للراحة والنوم

■ أثناء المذاكرة اقتطع وقت للراحة وتناول بعض المشروبات أو الأغذية المفيدة، ومن ثم العودة لمواصلة المذاكرة إذا ما سمح الوقت أو الظروف بذلك.

■ الاغتسال والاهتمام بالنظافة العامة يساعد على انتعاش الجسم، وحيويته.

■ عليك الانتباه إلى الحيل النفسية غير الشعورية أثناء المذاكرة كالرغبة في النوم أو أحلام اليقظة، أو الزيارات للهروب من تحمل المسؤولية.

■ مواجهة النفس الكسولة أو سريعة التعب، والتي لديها الإحساس بعدم الجدوى أو كثرة التذمر، بتقوية الإرادة والثقة في الذات واستشعار أهمية المذاكرة في تحقيق أهداف مستقبلية

نصائح عامة أثناء الاختبار :

■ عند الدخول إلى قاعة الاختبار تخيل أنك في مقابلة ممتعة بينك وبين قدراتك المعرفية، وليست مهمة صعبة أو موقف تحدي .

■ ابدأ الاختبار بذكر الله تعالى وقراءة الأوراد وبعض آيات من القرآن كالفاتحة والمعوذتين، وقول: لا حول ولا قوة إلا بالله، "توكلت على الله"، "اللهم رب اشرح لي صدري ويسر لي أمري"، و"اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً، وأنت تجعل الحزن إذا شئت سهلاً".

■ أثناء الجلوس على الكرسي المعد للاختبار قم بسحب الهواء داخل صدرك بعمق وازفره بهدوء وببطء، واجعل جسدك في وضع استرخاء.

■ أثناء تسلم ورقة الاختبار قل: بسم الله ، توكلت على الله، واشرع في كتابة جميع البيانات المطلوبة وابدأ بالأسئلة السهلة وذلك بعد معرفة المطلوب بصورة مؤكدة مع الحرص على توزيع الوقت بصورة منظمة مناسبة لمستوى الأسئلة.

■ إذا ما استصعبت سؤالاً أو نسيت الإجابة نتيجة قلق أو إرهاق أو خوف أو صعوبة تركيز فعليك بإتباع الخطوات التالية :

(١) لا تيأس أو تضطرب أو تحاول الخروج من القاعة.

(٢) دع ورقة الامتحان جانباً لبعض الوقت.

(٣) ضع يديك أمام عينيك وتنفس ببطء ثم بعمق عدة مرات، واذكر الله وردد الدعاء "رب اشرح لي صدري ويسِّر لي امري"، "يا حي يا قيوم برحمتك أستغيث ثم تذكر عندها الأحداث السارة في حياتك، ابعد عن ذهنك حينها انك في قاعة اختبار واجعل جسمك في وضع أكثر استرخاء.

(٤) بإمكانك ان تطلب كأساً من الماء، وتشطف وجهك بالجزء المتبقي من الماء بعد أن تشرب منه لاستعادة نشاطك.

(٥) عد إلى ورقة الامتحان وابدأ الإجابة عن السؤال الأكثر سهولة بالنسبة إليك، ستجد أن المعلومات قد بدأت في الخروج من ذاكرتك وهكذا ستشعر أنك بدأت تنتقل من سؤال لآخر بمرونة وثقة.

(٦) إذا واجهت سؤالاً صعباً لا تستسلم له، بل عالجه بالطريقة التي تجدها مناسبة، ركز في الأفكار التي يطرحها السؤال واربطها مع ما تتذكره من معلومات حتى ولو كانت سهلة.

(٧) حاول الإجابة عن جميع الأسئلة ولا تترك أحدها بلا إجابة .

- حاول في حالة عدم التأكد أو التذكر الصحيح لسؤال ما أن تلتزم باختيارك الأول للإجابة أو لأول وهلة دون شطب أو تغيير.

- لا تُثِرْ الشبهات حولك، وابتعد عن الغش، فبالإضافة إلى أنه من الأعمال المحرمة فإنه يضيع الوقت ويجلب القلق والمشكلات التي أنت في غنى عنها .

نصائح عامة بعد الاختبار :

- إذا ما وفقت في الاختبار فاحمد الله على توفيقه، واشكره على فضله ﴿ وَمَا بِكُم مِّن نِّعْمَةٍ فَمِنَ اللَّهِ ﴾ ولا تلق بكتبك وأوراقك في سلة المهملات بل احتفظ بها لتستفيد منها مستقبلاً. وإن لم يحالفك الحظ فاحمد الله على كل حال، واجعل ذلك دافعاً للمذاكرة التالية وتقديم الأفضل

- لا تنس الدعاء لإخوانك الطلاب بالنجاح بظهر الغيب . قال ﷺ "ما من عبد مسلم يدعو لأخيه بظهر الغيب إلا قال الملك ولك بمثل" رواه مسلم.

- لتكن السبَّاق لتقديم يد العون فيما تجود به أو تستطيع تقديمه لمساعدة إخوانك وزملائك على المذاكرة والنجاح، وليذكرك موقف الاختبار بالوقوف بين يدي الله تعالى يوم تعرض أعمالك عليه، لتَجدّ، وتستعد بالعمل الصالح حتى تحظى بالنجاح الأهم والأولى في ذلك اليوم.

مع تمنياتي لك ولجميع الطلاب والطالبات بالتوفيق والنجاح

دعواتكم هي غايتنا

هذه التوصيات تم الحصول عليها من موقع المسلم بتصرف

إعداد : د. أسماء بنت عبد العزيز الحسين

الرياضيات

الجبر

العبارات :

تعريف	* العبارة هي كل جملة خبرية يمكن الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة . * العبارة المفتوحة هي كل جملة خبرية تتضمن مجهولاً أو أكثر .
أقسامها	(١) جمل إنشائية ، وهي التي لا تحمل أي خبر مثل جمل النهي والاستفهام والطلب والنداء والتعجب والتمني وغيرها . (٢) جمل خبرية ، وهي التي تحمل خبراً أو أكثر وتنقسم إلى : (أ) جمل يمكن الحكم بصوابها . (ب) جمل يمكن الحكم بخطئها . (جـ) جمل لا نستطيع الحكم بصوابها أو خطئها لاحتوائها على مجهول .
أنواعها	(١) عبارة بسيطة ، إذا كانت تحتوي خبراً واحداً . (٢) عبارة مركبة ، إذا كانت تحتوي على أكثر من خبر .
نفي العبارة	إذا كان أ رمزاً لعبارة ما فإن نفي هذه العبارة هو (~ أ) (وتقرأ نفي أ)

أدوات الربط

أدوات الربط

م	أداة الربط	العبارة المركبة	الصيغة اللفظية للعبارة
١	$\wedge$	أ $\wedge$ ب	أ وَ ب
٢	$\vee$	أ $\vee$ ب	أ او ب
٣	$\leftarrow$	أ $\leftarrow$ ب	إذا كان أ فإن ب
٤	$\leftrightarrow$	أ $\leftrightarrow$ ب	أ إذا وفقط إذا كان ب

الرابط (وَ)	تكون العبارة المركبة أ $\wedge$ ب صائبة في حالة واحدة فقط وهي الحالة التي تكون فيها العبارتان أ ، ب صائبتين في وقت واحد .
الرابط (او)	تكون العبارة المركبة أ $\vee$ ب خاطئة في حالة واحدة فقط وهي الحالة التي تكون فيها العبارتان أ ، ب خاطئتين في وقت واحد .
الرابط (إذا .... فإن)	تكون العبارة المركبة أ $\leftarrow$ ب خاطئة في حالة واحدة فقط وهي الحالة التي تكون فيها العبارة أ صائبة والعبارة ب خاطئة .
الرابط (إذا وفقط إذا)	تكون العبارة المركبة أ $\leftrightarrow$ ب صائبة في حالتين وهما أن تكون العبارتان أ ، ب صائبتين معاً أو خاطئتين معاً .
ملاحظة	العبارة أ $\leftrightarrow$ ب تعني (أ $\leftarrow$ ب) $\wedge$ (ب $\leftarrow$ أ)

يمكن تلخيص قيم الصدق الممكنة لعبارة مركبة من عبارتين (أ ، ب) مثلاً مربطتين بأحد الروابط الأربعة .

أ	ب	أ ∧ ب	أ ∨ ب	أ ← ب	أ ↔ ب
ص	ص	ص	ص	ص	ص
ص	خ	خ	ص	خ	خ
خ	ص	خ	ص	ص	خ
خ	خ	خ	خ	ص	ص

العبارات المتكافئة :

نقول أن العبارتين أ ، ب متكافئتان منطقياً وللإختصار متكافئتان إذا كان لهما قيم الصدق نفسها .

يرمز لتكافؤ عبارتين أ ، ب بالرمز أ ≡ ب (تُقرأ أ تكافئ ب)

اما الرمز أ ≢ ب (يُقرا أ لا تكافئ ب)

ملاحظات هامة : (١) إذا كانت أ ≡ ب فإن ~ أ ≡ ~ ب (٢) إذا كانت أ ≡ ب وَ ب ≡ جـ فإن أ ≡ جـ

إذا كانت أ ، ب اي عبارتين فإن :

(١) أ ≡ ~ أ (٢) أ ← ب ≡ ~ ب ← ~ أ ≡ ~ أ ∨ ب (٣) ~ (أ ← ب) ≡ أ ∧ ~ ب

(٤) ~ (أ ∧ ب) ≡ ~ أ ∨ ~ ب (٥) ~ (أ ∨ ب) ≡ ~ أ ∧ ~ ب

الاقتضاء : لأي عبارتين أ ، ب إذا كانت العبارة الشرطية أ ← ب صائبة فإن :

أ ⇐ ب (وتُقرا أ تقتضي ب) ويرمز لعدم الاقتضاء بالرمز ⇍ (ويُقرا لا يقتضي)

ملاحظات هامة : (١) إذا كانت العبارة (أ ← ب صائبة) فإن أ ⇐ ب

(٢) إذا كانت العبارة (~ ب ← ~ أ صائبة) فإن أ ⇐ ب

(٣) إذا كانت أ ⇐ ب فإن تحقق أ شرط كاف لتحقق ب

(٤) قد يكون أ ⇐ ب متحققاً في حين ان ب ⇐ أ غير متحقق

إذا كانت أ ، ب عبارتان وكان أ ⇐ ب وَ ب ⇐ أ فإننا نقول ان ، أ ⇔ ب (وتُقرا أ تكافئ ب)

ملاحظات هامة :

(١) الرمزين ⇔ و ≡ لهما دلالة واحدة وهي التكافؤ .

(٢) يكون أ ⇔ ب إذا كانت العبارتان الشرطيتان ، أ ← ب ، ب ← أ صائبتين معاً .

(٣) إذا كان أ ⇍ ب أو ب ⇍ أ فإن أ ⇎ ب (ويُقرا أ لا يكافئ ب)

(٤) علاقة الاقتضاء متعدية . اي أنه إذا كانت أ ⇐ ب وَ ب ⇐ جـ فإن ، أ ⇐ جـ

المجموعات والعمليات عليها :

تنقسم المجموعات إلى :

(١) مجموعة منتهية : المعروف عدد عناصرها .   (٢) مجموعة غير منتهية : الغير معروف عدد عناصرها .

ملاحظات هامة: (١) لا يكرر العنصر في المجموعة   (٢) ترتيب العناصر غير مهم في المجموعة

المجموعة الخالية :   هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويُرمز لها بالرمز ($\varnothing$) ويُقرا (فاي)

الانتماء :

يقال عن عنصر أنه ينتمي لمجموعة ما إذا كان عنصراً من عناصر ها

ويُرمز للانتماء بالرمز $\in$ ويقرا (ينتمي)

ويقال عن عنصر أنه لا ينتمي لمجموعة ما إذا لم يكن عنصراً من عناصر ها

ويُرمز لعدم الانتماء بالرمز $\notin$ ويقرا (لا ينتمي)

المجموعة الجزئية :

إذا كان كل عنصر في المجموعة سـ عنصراً في المجموعة صـ فإننا نقول أن :سـ مجموعة جزئية من صـ ويُرمز لها بالرمز سـ $\subset$ صـ ويمكن ايضاً القول أن صـ تحتوي سـ أو سـ محتواه في صـ .

ملاحظات هامة:

(١) $\varnothing \subset$ سـ حيث سـ أي مجموعة   (٢) الرمزان $\in$ ، $\notin$ يستعملان بين عنصر ومجموعة

أما الرمزان $\subset$ ، $\not\subset$ يستعملان بين مجموعتين .

تساوي مجموعتين: نقول أن المجموعتين سـ ، صـ متساويتان أو سـ = صـ إذا كان كل عنصر في إحدى المجموعتين عنصراً في المجموعة الأخرى ويكون لهما نفس عدد العناصر

المجموعة الجزئية الفعلية: إذا كانت المجموعة سـ مجموعة جزئية من المجموعة صـ لكنها لا تساويها فإننا نقول ان سـ مجموعة جزئية فعلية من صـ

المجموعة الشاملة : المجموعة الشاملة لعدة مجموعات هي المجموعة التي عناصرها تشمل جميع عناصر تلك المجموعات . يرمز لها بالرمز شـ

العمليات على المجموعات : يوجد أربع عمليات على المجموعات وهي :

التقاطع $\cap$ وَ الاتحاد $\cup$ وَ الفرق بين مجموعتين وَ متممة المجموعة

اولاً : تقاطع مجموعتين ($\cap$) :

هي مجموعة العناصر المشتركة التي تنتمي لكلٍ من المجموعتين في آن واحد .

سـ $\cap$ صـ = { س : س $\in$ سـ $\wedge$ س $\in$ صـ }

ثانياً : اتحاد مجموعتين (∪) :

هي مجموعة جميع العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى أو الثانية .

س~ ∪ ص~ = { س : س ∈ س~ ∨ س ∈ ص~ }

ملحوظة: إذا كان س~ ∩ ص~ = ∅ فيقال أن س~ ، ص~ متباعدتان (منفصلتان)

بعض خواص عمليتي التقاطع والاتحاد :

الخاصية	التعبير الرياضي لها
الإبدال	س~ ∩ ص~ = ص~ ∩ س~ س~ ∪ ص~ = ص~ ∪ س~
التجميع	(س~ ∩ ص~) ∩ ع~ = س~ ∩ (ص~ ∩ ع~) (س~ ∪ ص~) ∪ ع~ = س~ ∪ (ص~ ∪ ع~)
توزيع التقاطع على الاتحاد	س~ ∩ (ص~ ∪ ع~) = (س~ ∩ ص~) ∪ (س~ ∩ ع~)
توزيع الاتحاد على التقاطع	س~ ∪ (ص~ ∩ ع~) = (س~ ∪ ص~) ∩ (س~ ∪ ع~)

ملاحظات هامة:

[١] إذا كانت س~ ⊂ ص~ فإن :

(١) س~ ∩ ص~ = س~ (الصغيرة) (٢) س~ ∪ ص~ = ص~ (الكبيرة)

[٢] إذا كانت س~ = ص~ فإن : س~ ∩ ص~ = س~ ∪ ص~ = س~ = ص~

ثالثاً : متممة المجموعة :

لأي مجموعة س~ ومجموعة شاملة لها ش~ فإن متممة س~ هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي للمجموعة ش~ ولا تنتمي للمجموعة س~ ويرمز لها بالرمز (س~') وتُقرأ (متممة س~)

ملاحظات هامة:

إذا كانت ش~ هي المجموعة الشاملة لـ س~ فإن :

(١) س~ ∩ س~' = ∅ (٢) س~ ∪ س~' = ش~ (٣) س~ ∩ ش~ = س~

(٤) س~ ∪ ش~ = ش~ (٥) (س~')' = س~ (٦) ∅' = ش~

(٧) ش~' = ∅

يمكن كتابة متممة س~ كما يلي : س~' = { س : س ∈ ش~ ∧ س ∉ س~ }

رابعاً : الفرق بين مجموعتين :

لأي مجموعتين س~ ، ص~ يقال على مجموعة العناصر التي تنتمي للمجموعة س~ ولا تنتمي للمجموعة ص~ بالفرق بين المجموعتين س~ ، ص~ ويرمز له بالرمز س~ − ص~

ويمكن التعبير عن الفرق بين مجموعتين كما يلي : س~ − ص~ = { س : س ∈ س~ ∧ س ∉ ص~ }

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت س~ ، ص~ مجموعتين منفصلتين فإن : س~ − ص~ = س~ وَ ص~ − س~ = ص~

(٢) إذا كانت س~ − ص~ = ص~ − س~ فإن : س~ = ص~

(٣) س~ − ص~ = س~ ∩ ص~َ (٤) ش~ − س~ = س~َ

لأي مجموعتين جزئيتين س~ ، ص~ من مجموعة شاملة ش~ يكون :

(١) (س~ ∩ ص~)َ = س~َ ∪ ص~َ (٢) (س~ ∪ ص~)َ = س~َ ∩ ص~َ

* **الزوج المرتب :**

إذا كان س ∈ س~ ، ص ∈ ص~ فإن (س، ص) يسمى زوجاً مرتباً ، مركبتهُ الأولى س ، ومركبته الثانية ص .

* **تساوي الأزواج المرتبة :** يقال ان (س، ص) = (أ ، ب) إذا كان س = أ ، ص = ب

الجداء الديكارتي :

إذا كانت س~ ، ص~ مجموعتين غير خاليتين فإن س~ × ص~ **يسمى الجداء الديكارتي** حيث س~ × ص~ = { (س ، ص) : س ∈ س~ ∧ ص ∈ ص~ }

ملحوظة :

(١) س~ × ص~ ≠ ص~ × س~ إلا إذا كانت س~ = ص~ (٢) س~² = س~ × س~

(٣) إذا كان عدد عناصر س~ = م ، عدد عناصر ص~ = ن فإن ، عدد عناصر س~ × ص~ = م . ن عنصراً

العلاقـة :

إذا كانت س~ ، ص~ مجموعتين غير خاليتين ، وكان س ∈ س~ ، ص ∈ ص~ حيث س علاقة مع ص فإن

ع = { (س ، ص) ، س ∈ س~ ، ص ∈ ص~ ، س ع ص }

حيث ع **تسمى بيان العلاقة** ، س~ **يسمى المجال** و ص~ **يسمى المجال المقابل**

ملاحظات :

(١) ع ⊂ س~ × ص~ (٢) إذا كان (أ ، ب) ∈ ع فإن ، أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~

مفهوم التطبيق : إذا كانت س~ ، ص~ مجموعتين غير خاليتين ، فإن العلاقة من س~ إلى ص~ تسمى **تطبيقاً**

إذا كان كل عنصر في س~ يرتبط بعنصر واحد فقط في ص~ .

ويرمز لهذا التطبيق بالرمز : ر ، س~ ⟵ ص~ أو س~ ⟵(ر) ص~

ملحوظة : إذا انطلق سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر س~ سُميت العلاقة تطبيقاً

التعبير عن قاعدة التطبيق :

يمكن التعبير عن التطبيق د : س~ ⟵ ص~ بكتابة قاعدة له تسمى **قاعدة التطبيق** على الصورة

ص = د(س)

ملاحظات هامة :

(١) مجموعة الأعداد الطبيعية ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

(٢) مجموعة الأعداد الصحيحة ص~ = { .... ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٠ ، −١ ، −٢ ، −٣ ، .... }

(٣) مجموعة الأعداد النسبية ن = { $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب ∈ ص~ ، ب ≠ ٠ }

(٤) مجموعة الأعداد الحقيقية ح = ن ∪ ن̄

مجال التطبيق ومجاله المقابل ومداه :

إذا كان التطبيق د : س~ ⟵ ص~ فإن المجموعة س~ تسمى **مجال التطبيق** والمجموعة ص~ تسمى **المجال المقابل** . بينما المجموعة الجزئية من ص~ التي تتكون من جميع صور عناصر س~ تحت تأثير التطبيق د تسمى **مدى التطبيق** د .

ملاحظة هامة: المدى ⊆ المجال المقابل .

أنواع التطبيقات :

يوجد ثلاثة أنواع من التطبيقات هي :

(١) تطبيقاً شاملاً (٢) تطبيقاً متبايناً (٣) تقابلاً

التطبيق الشامل	التطبيق المتباين	التقابل (التناظر الأحادي)
يسمى التطبيق : د : س~ ⟵ ص~ تطبيقاً شاملاً إذا كان كل عنصر في المجال المقابل ص~ هو صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال س~ بمعنى أن : المدى = المجال المقابل	يسمى التطبيق : د : س~ ⟵ ص~ تطبيقاً متبايناً إذا كان كل عنصران مختلفان في س~ يقترنان بعنصران مختلفان في ص~ بمعنى أن : لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∈ س~ إذا كان د($س_١$) = د($س_٢$) فإن $س_١$ = $س_٢$	يسمى التطبيق : د : س~ ⟵ ص~ تقابلاً (أو تناظراً احادياً) إذا كان متبايناً وشاملاً في الوقت نفسه . بمعنى أن : إذا كان كل عنصر في المجال المقابل صورة لعنصر واحد فقط في المجال س~

تحصيل التطبيقات (تركيب التطبيقات) :

التطبيق المحصل للتطبيقين $د_١$: س~ ⟵ ص~ ، $د_٢$: ص~ ⟵ ع~

هو التطبيق $د_٢$ ∘ $د_١$: س~ ⟵ ع~ المُعرّف بالقاعدة : $د_٢$ ∘ $د_١$(س) = $د_٢$($د_١$(س))

ملاحظات هامة :

(١) مجال التطبيق المحصل د٢ ∘ د١ = مجال د١

(٢) المجال المقابل للتطبيق المحصل د٢ ∘ د١ = المجال المقابل للتطبيق د٢

(٣) مدى التطبيق د٢ ∘ د١ مجموعة جزئية من مدى د٢

(٤) عملية تحصيل التطبيقات غير إبدالية بمعنى أن : د٢ ∘ د١ ≠ د١ ∘ د٢

(٥) عملية تحصيل التطبيقات عملية تجميعية (دامجة)

الصورة العكسية لعنصر تحت تأثير تطبيق :

إذا كان د : س ⟵ ص تطبيقاً وكان ص ∈ ص فإن الصورة العكسية للعنصر ص هي مجموعة عناصر المجموعة س التي ترتبط بالعنصر ص بواسطة التطبيق د ، أي أن :

الصورة العكسية للعنصر ص هي : { س : س ∈ س ، د(س) = ص }

سؤال : هل كل تطبيق يمكن إيجاد معكوسه ؟

الإجابة : لا يكون للتطبيق معكوس إلا إذا كان ذلك التطبيق تقابلاً أي أن : التطبيق الذي له معكوس هو التقابل فقط .

معكوس التطبيق :

إذا كان د : س ⟵ ص تطبيقاً تقابلاً فإن التطبيق الذي يربط كل عنصر في ص بصورته العكسية في س يسمى **معكوس التطبيق** د أي أن : د$^{-1}$: ص ⟵ س تطبيق بحيث د$^{-1}$(ص) = س

ملاحظات هامة :

(١) لكل تقابل د : س ⟵ ص تقابل عكسي د$^{-1}$: ص ⟵ س

(٢) إذا كان د : س ⟵ ص تطبيقاً تقابلاً وكان د$^{-1}$: ص ⟵ س معكوسه فإن :

(أ) د$^{-1}$ ∘ د(س) = س لكل س ∈ س (ب) د ∘ د$^{-1}$(ص) = ص لكل ص ∈ ص

القيمة المطلقة للعدد الحقيقي :

إذا كان أ عدداً حقيقياً فإن القيمة المطلقة للعدد أ ونرمز لها بالرمز | أ | تُعرف على النحو التالي :

| أ | = { أ عندما أ > ٠ ، صفر عندما أ = صفر ، −أ عندما أ < ٠

ملاحظات هامة : (١) | أ | ≥ ٠ لكل أ ∈ ح (٢) √أ٢ = | أ |

(٣) المسافة بين النقطتين س١ ، س٢ على خط الأعداد هي | س١ − س٢ |

خواص القيمة المطلقة للعدد الحقيقي : إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن :

(١) | أ | = | −أ | (٢) −| أ | ≤ أ ≤ | أ | (٣) | أ . ب | = | أ | . | ب |

(٤) | أ/ب | = | أ | / | ب | ، ب ≠ ٠ (٥) | أ + ب | ≤ | أ | + | ب |

الفترات المحدودة :

م	الفترة	رمزها	التعبير عن الفترة	تمثيلها على خط الأعداد	ملاحظات
١	الفترة المغلقة	[أ،ب]	[أ،ب] = {س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب}		أ،ب ∈ [أ،ب]
٢	الفترة المفتوحة	(أ،ب)	(أ،ب) = {س : س ∈ ح ، أ < س < ب}		أ،ب ∉ (أ،ب)
٣	الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة	[أ،ب)	[أ،ب) = {س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب}		أ ∈ [أ،ب) ب ∉ [أ،ب)
٤	الفترة نصف المفتوحة أو نصف المغلقة	(أ،ب]	(أ،ب] = {س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب}		أ ∉ (أ،ب] ب ∈ (أ،ب]

الفترات الغير محدودة (الممتدة):

م	الفترة	التعبير عن الفترة	تمثيلها على خط الأعداد	ملاحظات
١	[أ،∞)	[أ،∞) = {س : س ∈ ح ، س ≥ أ}		أ ∈ [أ،∞)
٢	(أ،∞)	(أ،∞) = {س : س ∈ ح ، س > أ}		أ ∉ (أ،∞)
٣	(−∞،أ]	(−∞،أ] = {س : س ∈ ح ، س ≤ أ}		أ ∈ (−∞،أ]
٤	(−∞،أ)	(−∞،أ) = {س : س ∈ ح ، س < أ}		أ ∉ (−∞،أ)

متباينات الدرجة الأولى بمتغير واحد وتحتوى على القيمة المطلقة :

(١) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين وكان ب $\geqslant$ ٠ فإن ، $|أ| \leqslant ب \iff -ب \leqslant أ \leqslant ب$

(٢) إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين وكان $|أ| \geqslant ب$ فإن ، $أ \geqslant ب$ او $أ \leqslant -ب$

ملاحظة : طول اي ضلع في مثلث اصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بينهما .

الأسس :

(١) لكل أ $\in$ ح ، ن $\in$ ط يكون ، $\boxed{أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times \dots\dots\dots \times أ}$ (حيث أ مكررة ن من المرات)

ويقرأ الرمز $أ^{ن}$ (أ اس ن) او (أ مرفوعة للقوة ن) ويسمى أ الأساس ، ن الأس او القوة .

(٢) $\boxed{أ^{٠} = ١}$ لكل أ $\in$ ح $-\{٠\}$ (٣) $\boxed{أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}}$ لكل أ $\in$ ح $-\{٠\}$ ، ن $\in$ ط

قوانين الأسس: إذا كان أ ، ب $\in$ ح $-\{٠\}$ ، م ، ن $\in$ ص فإن ،

م	القانون	مثال توضيحي	تعليق
١	$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$	(١) $٢^{٣} \times ٢^{٥} = ٢^{٣+٥} = ٢^{٨}$	في حالة ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس .
٢	$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$	(١) $\frac{٣^{٥}}{٣^{٢}} = ٣^{٥-٢} = ٣^{٣}$	في حالة قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس .
٣	$(أ\,ب)^{م} = أ^{م} \times ب^{م}$	$(٣\sqrt{٢})^{٢} = ٣^{٢} \times (\sqrt{٢})^{٢}$ $= ٩ \times ٢ = ١٨$	يتوزع الأس على الضرب .

م	القانون	مثال توضيحي	تعليق
٤	$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{م} = \frac{أ^{م}}{ب^{م}}$	$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} = \frac{٢^{٣}}{٣^{٣}} = \frac{٨}{٢٧}$	يتوزع الأس على البسط والمقام .
٥	$(أ^{م})^{ن} = أ^{م \times ن}$	$((\sqrt{٢})^{٤})^{٣} = (\sqrt{٢})^{١٢}$ $= ٢^{٦} = ٦٤$	نضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي .
٦	$(أ^{\frac{١}{ن}})^{م} = (أ^{م})^{\frac{١}{ن}} = أ^{\frac{م}{ن}}$	$(٢^{\frac{١}{٣}})^{٥} = (٢)^{\frac{٥}{٣}}$	

ملاحظات هامة:

(١) لا يمكن توزيع الأس على الجمع أو الطرح . بمعنى أن : $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} \neq \text{أ}^{\text{ن}}+\text{ب}^{\text{ن}}$

(٢) الأسس لا تُجمع إلا في حالة تساوي الأساسات . $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}$

بينما في حالة تساوي الأسس نضرب الأساسات $\text{أ}^{\text{ن}} \times \text{ب}^{\text{ن}} = (\text{أ} \times \text{ب})^{\text{ن}}$

(٣) إذا كان $\text{أ}^{\text{م}} = \text{أ}^{\text{ن}}$ فإن $\text{م} = \text{ن}$ حيث $\text{أ} \in \text{ع} - \{-١ ، ٠ ، ١\}$

بمعنى أنه : (إذا كان الأساس = الأساس فإن الأس = الأس)

(٤) إذا كان $\text{أ}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ن}}$ حيث $\text{أ} ، \text{ب} \in \text{ع}^{*}$

فإن

$\text{أ} = \text{ب}$ عندما ن عدد فردي

$\text{أ} = \pm \text{ب}$ عندما ن عدد زوجي

$\text{ن} = ٠$ عندما $\text{أ} \neq \text{ب}$

الطريقة العلمية لكتابة الأعداد :

لكتابة أي عدد ما بالطريقة العلمية فإننا نكتبه على الصورة :

$\text{هـ} \times ١٠^{\text{ن}}$ حيث $١ \leq \text{هـ} < ١٠$ ، ن عدد صحيح

عدد صحيح سالب: $\text{هـ} \times ١٠$ ، اتجاه حركة الفاصلة ←

عدد صحيح موجب: $\text{هـ} \times ١٠$ ، اتجاه حركة الفاصلة →

الرقم المعنوي :

الرقم المعنوي في عدد ما هو أي رقم لا يساوي الصفر أو أي صفرٍ لا يكون القصد من إثباته هو تحديد موضع الفاصلة العشرية .

الجذور التربيعية :

يقال للعدد ب أنه جذر تربيعي للعدد أ إذا كان : $\text{أ} = \text{ب}^{٢}$ ويكتب على الصورة: $\boxed{\text{ب} = \sqrt{\text{أ}}}$

ملاحظات :

(١) لكل عدد حقيقي موجب أ جذران تربيعيان هما : $\sqrt{\text{أ}}$ ، $-\sqrt{\text{أ}}$

(٢) ليس للعدد السالب جذر تربيعي في ع

(٣) الجذر التربيعي للعدد (صفر) هو (صفر) أي أن : $\sqrt{\text{صفر}} = \text{صفر}$

(٤) $\sqrt{\text{أ}^{٢}} = |\text{أ}|$ لكل $\text{أ} \in \text{ع}$

خصائص الجذور :

م	الخاصية	مثال توضيحي
١	$\sqrt{أ}\times\sqrt{ب}=\sqrt{أ\times ب}$	$\sqrt{٢}\times\sqrt{٣}=\sqrt{٦}$
٢	$\sqrt{\frac{أ}{ب}}=\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$	$\sqrt{\frac{٢٥}{٤٩}}=\frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٤٩}}=\frac{٥}{٧}$
٣	$\left(\sqrt{أ^{م}}\right)^{ن}=\left(\sqrt{أ}\right)^{م\times ن}$	$\left(\sqrt{٢^{٣}}\right)^{٥}=\left(\sqrt{٢}\right)^{٣\times ٥}=\left(\sqrt{٢}\right)^{١٥}$
٤	$\sqrt{أ^{٢}+ب^{٢}}\neq أ+ب$	$\sqrt{٩+٢٥}\neq ٣+٥$
٥	$أ\sqrt{ب}=\sqrt{أ^{٢}ب}$	$\sqrt{٩\times ٥}=٣\sqrt{٥}$

ملاحظات هامة :

(١) المقدار $\sqrt{أ}-\sqrt{ب}$ مرافقه هو $\sqrt{أ}+\sqrt{ب}$

(٢) حاصل ضرب المقدار × مرافقه = $(\text{الأول})^{٢}-(\text{الثاني})^{٢}$

فمثلاً : $\left(\sqrt{أ}-\sqrt{ب}\right)\left(\sqrt{أ}+\sqrt{ب}\right)=\left(\sqrt{أ}\right)^{٢}-\left(\sqrt{ب}\right)^{٢}=أ-ب$

، $\left(٢-\sqrt{٣}\right)\left(٢+\sqrt{٣}\right)=٤-٣=١$ وهكذا .

طريقة أبوكامل المصري لجمع أو طرح جذرين تربيعيين :

$$\left|\sqrt{أ}\pm\sqrt{ب}\right|=\sqrt{(أ+ب)\pm ٢\sqrt{أب}}$$

الجذور التكعيبية : الجذر التكعيبي للعدد أ هو العدد الذي مكعبه أ وترمزله بالرمز $\sqrt[٣]{أ}$

ملاحظات هامة :

(١) لكل عدد حقيقي موجب جذر تكعيبي موجب فمثلاً ، $\sqrt[٣]{٦٤}=٤$

(٢) لكل عدد حقيقي سالب جذر تكعيبي سالب فمثلاً ، $\sqrt[٣]{-٢٧}=-٣$

(٣) $\sqrt[٣]{\text{صفر}}=\text{صفر}$

خواص الجذور التكعيبية :

(١) $\sqrt[٣]{أ}\times\sqrt[٣]{ب}=\sqrt[٣]{أب}$

(٢) $\sqrt[٣]{\frac{أ}{ب}}=\frac{\sqrt[٣]{أ}}{\sqrt[٣]{ب}}$

(٣) $\left(\sqrt[٣]{أ^{م}}\right)^{ن}=\left(\sqrt[٣]{أ}\right)^{م\times ن}$

(٤) $\left(\sqrt[٣]{\frac{١}{ب}}\right)^{٣}=\frac{١}{ب}$

(٥) $\sqrt[٣]{أ^{ن}}=أ^{\frac{ن}{٣}}$

(٦) $\sqrt[٣]{-أ}=-\sqrt[٣]{أ}$

تعريف اللوغاريتم :

لو اعتبرنا أي عدد حقيقي موجب ب فإنه يقابله عدد حقيقي وحيد جـ حيث ب = أ^{جـ} (أ > ٠ ، أ ≠ ٠)
الأس جـ نسميه لوغاريتم العدد ب للأساس أ ويرمز له بالرمز : $\boxed{\text{جـ = لو}_{أ}\text{ ب}}$

فمثلاً : ٣^{٤} = ٨١ ⟸ ٤ = لو$_{٣}$ ٨١

التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس :

إذا كان : أ ، ب عددين حقيقيين موجبين (أ ≠ ٠) فإن : لو$_{أ}$ ب = جـ ⟺ ب = أ^{جـ}

ملاحظات هامة:

(١) أ$^{لو_{أ} ب}$ = ب (٢) لو$_{أ}$ ١ = صفر (٣) لو$_{أ}$ أ = ١

(٤) لا معنى للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب فكل من لو$_{٢}$ (−٣) ، لو$_{٦}$ (صفر) لا معنى له .

(٥) الأساس أ يجب ان يكون عدداً موجباً يختلف عن الواحد الصحيح (٦) لو$_{ب}$ أ × لو$_{أ}$ ب = ١

الدالة اللوغاريتمية :

إذا كان أ ∈ ح$^{+}$ − { ١ } فإن الدالة : $\boxed{\text{ص = لو}_{أ}\text{ س}}$ تسمى الدالة اللوغاريتمية للأساس أ

ملاحظات : لحل المعادلات اللوغاريتمية التي على الصورة : لو$_{أ}$ د(س) = لو$_{أ}$ ب يكون د (س) = ب وتوجد قيم س ويجب ضرورة التحقق من صحتها في المعادلة الأصلية .

قوانين اللوغاريتمات :

إذا كان ب ، جـ ∈ ح$^{+}$ ، أ ∈ ح$^{+}$ − { ١ } فإن :

القانون	مثال توضيحي
لو$_{أ}$ (ب × جـ) = لو$_{أ}$ ب + لو$_{أ}$ جـ	لو$_{٣}$ (٢ × ٥) = لو$_{٣}$ ٢ + لو$_{٣}$ ٥
لو$_{أ}$ ($\frac{ب}{جـ}$) = لو$_{أ}$ ب − لو$_{أ}$ جـ	لو$_{٢}$ ($\frac{٣}{٧}$) = لو$_{٢}$ ٣ − لو$_{٢}$ ٧
لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س	لو$_{٢}$ ٥^{٣} = ٣ لو$_{٢}$ ٥
١ − لو$_{أ}$ س = لو$_{أ}$ ($\frac{١}{س}$)	١ − لو$_{٣}$ ٣ = لو$_{٢}$ ($\frac{٢}{٣}$)

ملاحظات هامة :

(١) تتذكر جيداً أن : لو$_{أ}$ (س + ص) ≠ لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص كما أن : لو$_{أ}$ (س × ص) ≠ لو$_{أ}$ س × لو$_{أ}$ ص

(٢) لو$_{أ}$ (س − ص) ≠ لو$_{أ}$ س − لو$_{أ}$ ص (٣) لو$_{أ}$ (س/ص) ≠ لو$_{أ}$ س ÷ لو$_{أ}$ ص

(٤) لو$_{أ}$ أ = ١ ، لو$_{أ}$ ١ = صفر (٥) إذا لم يُكتب أساس للوغاريتم فإن هذا الأساس = ١٠

فمثلاً : لو$_{١٠}$ س = لو س

العدد البياني والجزء العشري من لوغاريتم عدد :

يمكن كتابة أي لوغاريتم عشري لعدد موجب على الصورة :

لو س = جزء عشري موجب + عدد صحيح (العدد البياني)

فمثلاً : لو س = ٣٫٦٣٢٧

الجزء العشري ← العدد البياني ←

* إذا كان العدد البياني سالباً فإننا نضع فوقه خطاً كما في المثال التالي :

لو س = $\overline{٦}$٫٥٤٦٥

الجزء العشري ← العدد البياني ←

طريقة إيجاد العدد البياني للوغاريتم : كيفية إيجاد العدد البياني من لو س

اللوغاريتم	س	العدد البياني
لو س	س ≥ ١	العدد البياني = (عدد ارقام الجزء الصحيح) − ١ ↓ على يسار الفاصلة العشرية
لو س	٠ < س < ١	العدد البياني = − [(عدد الأصفار يمين الفاصلة العشرية) + ١]

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان العدد البياني من لو س موجباً فإن س أكبر من الواحد .

(٢) إذا كان العدد البياني من لو س سالباً فإن س أكبر من الصفر وأقل من الواحد .

(٣) إذا ضربنا عدداً في قوى العشرة أو قسمناه عليها فلا يتغير القسم العشري للوغاريتم هذا العدد ويتغير فقط العدد البياني .

العمليات الثنائية

إذا كان (س~ ، *) نظاماً ذو عملية وكان : أ * ب ∈ س~ لكل أ ، ب ∈ س~

فإن النظام (س~ ، *) مغلق بمعنى أن العملية * عملية ثنائية .

ملاحظات هامة :

(١) عملية جمع الساعات عملية ثنائية معرفة على س = { ١، ٢، ٣، .... ١٢ }

(٢) يمكن تعريف المجموعة ص$_{ن}$ (ص مقياس ن) بالصورة ص$_{ن}$ = { ٠، ١، ٢، ٣، ....، ن – ١ }

(٣) يمكن تعريف المجموعة ص$^{*}_{ن}$ بأنها ص$_{ن}$ – { ٠ } حيث ، ص$^{*}_{ن}$ = { ١، ٢، ٣، ....، ن – ١ }

(٤) يمكن تعريف العمليتين ⊕ ، ⊙ حيث ، أ ⊕ ب = باقي قسمة أ + ب على ن

أ ⊙ ب = باقي قسمة أ ب على ن

الزُمـرة :

النظام (س ، *) يسمى زمرة إذا تحققت فيه الشروط التالية ،

(١) النظام مغلقاً (* عملية ثنائية) لكل أ ، ب ∈ س فإن أ * ب ∈ س

(٢) النظام تجميعياً لكل أ ، ب ، جـ ∈ س فإن (أ * ب) * جـ = أ * (ب * جـ)

(٣) النظام يحتوي على عنصرٍ محايدٍ لكل أ ∈ س فإن أ * م = م * أ = أ

(٤) لكل عنصر ∈ س يوجد نظيراً

لكل أ ∈ س يوجد نظير أ$^{-1}$ ∈ س بحيث ، أ * أ$^{-1}$ = أ$^{-1}$ * أ = م

وإذا تحقق شرط الإبدال بمعنى أن ، أ * ب = ب * أ لكل أ ، ب ∈ س فإننا نقول أن الزمرة إبدالية

ملاحظات هامة :

(١) في النظام (ص$_{ن}$ ، ⊕) يكون أ$^{-1}$ = ن – أ (٢) العنصر المحايد نظير نفسه دائماً .

(٣) إذا كان ن ∈ ط فإن النظام (ص$_{ن}$ ، ⊕) يكون زمرة إبدالية .

(٤) إذا كان ن عدداً أولياً فإن النظام (ص$_{ن}$ ، ⊙) يكون زمرة إبدالية .

القوى الصحيحة بالنسبة للزمر :

إذا كان النظام (س ، *) زمرة وكان س ∈ س ، ن ∈ ط فإننا نعرف القوى الصحيحة على النحو التالي ،

(١) س^{ن} = س * س * س * ...... * س ، س مكررة ن مرة

(٢) س$^{-ن}$ = (س$^{-1}$)^{ن} = س$^{-1}$ * س$^{-1}$ * س$^{-1}$ * ...... * س$^{-1}$ ، س$^{-1}$ مكررة ن مرة

(٣) س^{0} = م (العنصر المحايد)

ليكن النظام (س ، *) زمرة ، (١) إذا كانت س مجموعة منتهية فإننا نسمي الزمرة منتهية .

(٢) إذا كانت س مجموعة غير منتهية فإننا نسمي الزمرة غير منتهية .

فإذا كانت (س ، *) زمرة منتهية فإن عدد عناصر المجموعة س يسمى رتبة الزمرة

ويرمز لها بالرمز | س |

المجموعة المتولدة من قوى س في الزمرة

لتكن (سـ ، *) زمرة منتهية رتبتها ن وليكن س ∈ سـ تعرف المجموعة المتولدة من قوى س في الزمرة كما يلي

، < س > = { س ، س^{2} ، س^{3} ، .... ، س^{ر} = م } ، ر ≤ ن

وفي الحالة التي يكون فيها < س > = سـ فإننا نسمي س مولداً للزمرة سـ

الزُمر الدائرية :

نقول ان الزمرة (سـ ، *) زمرة دائرية إذا وُجد عنصر واحد على الأقل مولداً لها

ملاحظة : العنصر المحايد في اي زمرة لا يولد إلا نفسه اي ان ، < م > = { م }

الزُمر الجزئية : النظام (ع ، *) يسمى زمرة جزئية من سـ إذا تحقق شرطان :

(أ) ع ⊂ سـ حيث (سـ ، *) زمرة . (ب) (ع ، *) زمرة .

ملاحظة :

(١) لأي زمرة (سـ ، *) يوجد على الأقل زمرتان جزئيتان للزمرة سـ هما :

(أ) (< م > ، *) (ب) الزمرة سـ نفسها .

(٢) إذا كانت (سـ ، *) زمرة رتبتها ن وكان س ∈ سـ فإن ، (< س > ، *) زمرة جزئية للزمرة سـ

النظام ذو العمليتين الثنائيتين

إذا كان (سـ ، * ، o) نظاماً ذا عمليتين ثنائيتين فإننا نقول أن العملية الثنائية o تتوزع على العملية * إذا كان

لكل أ ، ب ، جـ ∈ سـ يتحقق الشرطان :

(١) أ o (ب * جـ) = (أ o ب) * (أ o جـ) (٢) (ب * جـ) o أ = (ب o أ) * (جـ o أ)

ملاحظات هامة :

(١) عملية الضرب " × " تتوزع على كلٍ من عمليتي الجمع " + " والطرح " − "

(٢) عملية التقاطع " ∩ " تتوزع على عملية الاتحاد " ∪ " والعكس صحيح

نوع المصفوفة (نظم المصفوفة) :

نقول أن المصفوفة من النوع م × ن إذا كان عدد الصفوف م صفاً وعدد الأعمدة ن عموداً .

تساوي مصفوفتان :

يقال أن المصفوفتين أ ، ب متساويتان إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

(١) أ ، ب لهما نفس النوع (النظم) . (٢) العناصر المتناظرة فيهما متساوية (أ$_{ي هـ}$ = ب$_{ي هـ}$)

[١] **جمع مصفوفتان :** شرط قابلية الجمع: أن تكون المصفوفتان أ ، ب من نفس النظم (النوع) .

طريقة الجمع : نجمع العناصر المتناظرة في المصفوفتين .

[٢] **ضرب مصفوفتان بعدد حقيقي :** لضرب عدد بمصفوفة نضرب العدد بجميع عناصر المصفوفة .

[٣] **طرح مصفوفة من أخرى :** طرح مصفوفتين يعني طرح كل عنصر في مصفوفة المطروح من العنصر الذي يماثل موضعه في مصفوفة المطروح منه .

ملحوظة: لا يمكن إجراء عملية الطرح إلا إذا كانت المصفوفتان من نفس النوع .

نظرية : إذا كان سم مجموعة المصفوفات من النوع م × ن فإن النظام (سم ، +) يكون زمرة إبدالية حيث (+) هي عملية جمع المصفوفات .

ضرب المصفوفات : حاصل ضرب مصفوفة بأخرى إن أمكن هو مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة المصفوفة الثانية .

تعريف: إذا كان لدينا مصفوفتين أ على النظم م × ن ، ب على النظم ن × ل فإنه يمكن إيجاد حاصل الضرب أ . ب ويكون الناتج مصفوفة من النظم م × ل

شرط قابلية ضرب المصفوفتين أ × ب

لا يمكن إيجاد أ × ب إلا إذا كان عدد أعمدة أ = عدد صفوف ب

ملاحظات :

(١) عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية بمعنى أن أ × ب ≠ ب × أ

(٢) إذا كان أ . ب معرفاً ، ليس بالضرورة أن يكون ب . أ معرفاً .

(٣) لا يمكن إيجاد $أ^{٢}$ إلا إذا كانت أ مصفوفة مربعة .

كيفية إجراء عملية الضرب للمصفوفتين :

* أول عنصر في المصفوفة أ . ب يساوي مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من أ × عناصر العمود الأول من ب .
* ثاني عنصر في المصفوفة أ . ب يساوي مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول من أ × عناصر العمود الثاني من ب ..... وهكذا .

محددة مصفوفة من النوع ٢ × ٢ :

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ فإن المقدار التالي : $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = أ د − ب جـ يسمى محددة المصفوفة أ ونرمز له بالرمز Δ وتقرأ (دلتا) أي أن ، محددة أ = Δ = $\begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ = أ × د − ب × جـ

النظير الضربي لمصفوفة من النوع ٢×٢ :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ فإن النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$ يكون موجوداً عندما يكون محددة $\underline{أ} \neq ٠$.

(أي عندما $\Delta \neq ٠$) ويمكن إيجاد النظير الضربي كما يلي ، $\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{\Delta} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$

إذا كانت $\Delta = ٠$ فإنه لا يوجد نظير ضربي للمصفوفة .

محددات الرتبة الثالثة :

إذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{bmatrix}$ فإن محددة المصفوفة $\underline{أ}$ هي ، محددة $\underline{أ} = \Delta = \begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix}$

لإيجاد قيمة المحددة ،$\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} = أ_{١} \begin{vmatrix} ب_{٢} & جـ_{٢} \\ ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} - ب_{١} \begin{vmatrix} أ_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix} + جـ_{١} \begin{vmatrix} أ_{٢} & ب_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} \end{vmatrix}$

ملاحظات :

[١] قاعدة إشارات المحددة من الرتبة الثالثة ، $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

[٢] طريقة أخرى لإيجاد قيمة المحددة من الرتبة الثالثة :

هناك طرق حسابية تسهل فك المحددة من الرتبة الثالثة وتتلخص في الآتي :

(١) نعيد كتابة العمودين الأول والثاني وذلك بعد كتابة عناصر المحددة .

(٢) نوجد مجموع حواصل ضرب العناصر التي تقع على القطر الرئيسي والأقطار الموازية له وليكن $م_{١}$

(٣) نوجد مجموع حواصل ضرب العناصر التي تقع على القطر الغير رئيسي والأقطار الموازية له وليكن $م_{٢}$

(٤) تكون قيمة المحددة $= م_{١} - م_{٢}$

فإذا كان $\Delta = \begin{vmatrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} \end{vmatrix}$

$$\begin{matrix} أ_{١} & ب_{١} & جـ_{١} & أ_{١} & ب_{١} \\ أ_{٢} & ب_{٢} & جـ_{٢} & أ_{٢} & ب_{٢} \\ أ_{٣} & ب_{٣} & جـ_{٣} & أ_{٣} & ب_{٣} \end{matrix}$$

وتكون :

$\Delta = (أ_{١}ب_{٢}جـ_{٣} + ب_{١}جـ_{٢}أ_{٣} + جـ_{١}أ_{٢}ب_{٣}) - (جـ_{١}ب_{٢}أ_{٣} + أ_{١}جـ_{٢}ب_{٣} + ب_{١}أ_{٢}جـ_{٣})$

خواص العدد ت : $ت = \sqrt{-١}$ ، $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = -ت$ ، $ت^{٤} = ١$

ملحوظة هامة: لإيجاد $ت^{م}$ حيث $م$ عدد صحيح نوجد باقي قسمة $م \div ٤$ فإذا كان الباقي $= ن$ فيكون $ت^{م} = ت^{ن}$

مجموعة الأعداد المركبة ك :

العدد المركب هو ما كان على الصورة $\boxed{س + ص ت}$ و تسمى الصيغة الجبرية للعدد حيث س، ص $\in$ ح ،

$$\underbrace{س}_{\text{الجزء الحقيقي}} + \underbrace{ص}_{\text{الجزء التخيلي}}\, ت$$

أولاً : جمع الأعداد المركبة وطرحها :

إذا كان $ع_{١} = س_{١} + ص_{١} ت$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ص_{٢} ت$ عددين مركبين فإن :

$ع_{١} + ع_{٢} = (س_{١} + س_{٢}) + (ص_{١} + ص_{٢})ت$ $\qquad$ $ع_{١} - ع_{٢} = (س_{١} - س_{٢}) + (ص_{١} - ص_{٢})ت$

بمعنى انه عند جمع عددين مركبين نجمع الجزأين الحقيقيين معاً والجزأين التخيليين معاً .

وعند طرح عددين مركبين نطرح الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيليين .

خواص جمع الأعداد المركبة :

(١) العنصر (ك ، +) يمثل زمرة إبدالية .

(٢) النظير الجمعي للعدد المركب س + ص ت هو العدد المركب − س − ص ت

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة :

(أ) ضرب عدد حقيقي بعدد مركب ، $ك(س + ص ت) = ك س + ك ص ت$ حيث ك $\in$ ح

(ب) ضرب عددين مركبين ، إذا كان $ع_{١} = س_{١} + ص_{١} ت$ ، $ع_{٢} = س_{٢} + ص_{٢} ت$ فإن ،

$$ع_{١} \cdot ع_{٢} = (س_{١} س_{٢} - ص_{١} ص_{٢}) + (س_{١} ص_{٢} + س_{٢} ص_{١})ت$$

خواص ضرب الأعداد المركبة :

(١) النظام ($ك^{*}$ ، .) يمثل زمرة إبدالية حيث $ك^{*}$ مجموعة الأعداد المركبة ما عدا الصفر .

(٢) العنصر المحايد في عملية ضرب الأعداد المركبة هو ١

(٣) المكوس الضربي للعدد $ع = س + ص ت$ هو العدد المركب ،

$$ع^{-١} = \left(\frac{س}{س^{٢} + ص^{٢}}\right) - \left(\frac{ص}{س^{٢} + ص^{٢}}\right)ت \quad \text{حيث } س^{٢} + ص^{٢} \neq \text{صفر}$$

(٤) عملية الضرب تتوزع على عملية الجمع في ك .

العدد المرافق لعدد مركب:

إذا كان العدد المركب ع = س + ص ت فإن العدد المركب $\overline{ع}$ = س − ص ت يسمى مرافق العدد المركب

خواص العددان المترافقان :

(١) مجموع عددين مترافقين : ع + $\overline{ع}$ = ٢ س

(٢) حاصل ضرب عددين مترافقين : ع . $\overline{ع}$ = $س^٢ + ص^٢$

(٣) المرافق لمجموع عددين مركبين = مجموع مرافقيهما $\overline{ع_١ + ع_٢} = \overline{ع_١} + \overline{ع_٢}$

(٤) المرافق لحاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مرافقيهما $\overline{ع_١ . ع_٢} = \overline{ع_١} . \overline{ع_٢}$

(٥) $\overline{\overline{ع}}$ = ع (مرافق المرافق للعدد يعطي العدد نفسه)

ملاحظات هامة:

(١) يجب الانتباه إلى أن : $ع^{-١}$ النظير الضربي ، $\overline{ع}$ مرافق العدد ع

(٢) $\overline{\overline{ع}}$ = ع (مرافق المرافق للعدد يعطي العدد نفسه)

(٣) يتساوى العددان المركبان $ع_١$ ، $ع_٢$ إذا كان :

(١) $س_١ = س_٢$ (الجزء الحقيقي في الأول = الجزء الحقيقي في الثاني)

(٢) $ص_١ = ص_٢$ (الجزء التخيلي في الأول = الجزء التخيلي في الثاني)

ثالثاً : قسمة الأعداد المركبة:

إذا كان $ع_١ = س_١ + ص_١$ ت ، $ع_٢ = س_٢ + ص_٢$ ت فإنه يمكن تعريف عملية القسمة كما يلي :

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{(س_١ + ص_١ ت)(س_٢ - ص_٢ ت)}{س_٢^٢ + ص_٢^٢}$$

الصورة المثلثية للعدد المركب:

يمكن كتابة العدد المركب ع = س + ص ت بطريقة أخرى تسمى الصورة المثلثية وفيها

س = | ع | جتا هـ ، ص = | ع | جا هـ حيث هـ تسمى الزاوية القطبية للعدد المركب ع

ولذلك يمكن كتابة العدد المركب ع = س + ص ت على الصورة :

ع = | ع | (جتا هـ + ت جا هـ)

ملاحظة:

مرافق العدد المركب ع = | ع | (جتا هـ + ت جا هـ) هو : $\overline{ع}$ = | ع | (جتا هـ − ت جا هـ)

نظرية ديموافر :

إذا كان ، ع = | ع | (جتا هـ + ت جا هـ) ، ن ∈ ط (عدد طبيعي)

فإن ، $ع^{ن}$ = $|ع|^{ن}$ [جتا (ن هـ) + ت جا (ن هـ)]

الجذور التكعيبية للعدد واحد :

يوجد للعدد ١ ثلاثة جذور تكعيبية هي :

$\boxed{١}$ ، $\boxed{ي = \frac{-١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت}$ ، $\boxed{\bar{ي} = \frac{-١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت}$

الجذور التكعيبية لأي عدد أ هي : ($\sqrt[٣]{أ}$ ، $\sqrt[٣]{أ}$ ي ، $\sqrt[٣]{أ}$ $\bar{ي}$)

دوال كثيرات الحدود : دالة كثيرة الحدود ، لتكن د ، ح ← ح بحيث لكل س ∈ ح فإن ،

$\boxed{د(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + ... + أ_{٢} س^{٢} + أ_{١} س + أ_{٠}}$

حيث $أ_{ن}$ ، $أ_{ن-١}$ ، ...... ، $أ_{٢}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٠}$ ∈ ح ، $أ_{ن} \neq ٠$ ، ن ∈ ك (مجموعة الأعداد الكلية)

عندئذ تسمى د(س) دالة كثيرة حدود في المتغير س من الدرجة ن

بعض أنواع كثيرات الحدود

(١) كثيرة الحدود الثابتة ، د(س) = $أ_{٠}$ حيث $أ_{٠}$ ∈ $ح^{*}$ و درجتها = صفر

(٢) كثيرة الحدود الصفرية ، د(س) = ٠ و درجتها غير معرفه (غير محددة)

تساوي كثيرتي حدود : يقال عن كثيرتي حدود إنهما متساويتان إذا تحقق الشرطان ،

(١) لهما نفس الدرجة (٢) المعاملات المتناظرة فيهما متساوية

جمع كثيرات الحدود و طرحها :

إذا كانت $ق_{١}$(س) ، $ق_{٢}$(س) كثيرتي حدود فإن ، ($ق_{١}$ + $ق_{٢}$)(س) = $ق_{١}$(س) + $ق_{٢}$(س)

وذلك بجمع معاملات الحدود المتشابهة

وأيضاً ، $ق_{١}$(س) − $ق_{٢}$(س) = $ق_{١}$(س) + (−١) $ق_{٢}$(س)

ملاحظات هامة :

(١) ناتج جمع دالتي كثيرتي حدود هي كثيرة حدود درجتها تساوي درجة أكبرهما على الأكثر

(٢) كثيرة الحدود الصفرية ق(س) = ٠ هي العنصر المحايد لعملية جمع كثيرات الحدود

(٣) النظام (ح [س] ، +) يمثل زمرة إبدالية

(٤) عملية طرح كثيرات الحدود هي عملية ثنائية على ح [س] و لكنها ليست إبدالية و ليست تجميعية و ليس لها عنصر محايد

ضرب كثيرات الحدود إذا كانت ق$_1$(س) ، ق$_2$(س) ∈ ح [س] ، ق$_1$ ، ق$_2$ ≠ ٠ فإن ،

ق$_1$(س) . ق$_2$(س) كثيرة حدود درجتها مجموع درجتي ق$_1$(س) ، ق$_2$(س)

ملاحظات هامة:

(١) عند ضرب كثيرات الحدود نوزع الضرب على الجمع و الطرح

(٢) عند الضرب نجمع الأسس عندما تكون الاساسات متشابهة **بمعنى** ، س^{أ} . س^{ب} = س$^{أ+ب}$

(٣) النظام (ح [س] ، ٠) لا يمثل زمرة إبدالية

قابلية قسمة كثيرات الحدود :

إذا كانت ق(س) ، هـ(س) كثيرتي حدود فإننا نقول أن ق(س) تقبل القسمة على هـ(س) إذا وُجدت كثيرة حدود ل(س) تحقق العلاقة ،

$\boxed{\text{ق(س) = هـ(س) . ل(س)} \quad \forall \text{ س} \in \text{ح}}$

القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود :

إذا كانت ق(س) ، هـ(س) ∈ ح [س] ، هـ(س) ليست دالة ثابتة فإنه يوجد ل ، ر (كثيرتي حدود) بحيث يكون ، ق(س) = هـ(س) . ل(س) + ر(س) اي أن ، **المقسوم = المقسوم عليه × خارج القسمة + الباقي**

نظرية الباقي : عند قسمة كثيرة الحدود ق(س) على هـ(س) = س − أ حيث أ ∈ ح فإن باقي القسمة ر(س) هو كثيرة حدود ثابتة تساوي ق(أ)

ملاحظات هامة:

(١) هذه النظرية تتيح لنا إيجاد باقي قسمة ق(س) على هـ(س) = س − أ دون إجراء القسمة المطولة .

(٢) نظرية الباقي تستخدم فقط لحساب باقي القسمة و لا يستفاد منها في حساب خارج القسمة .

(٣) نظرية الباقي لا تُطبق إلا إذا كان المقسوم عليه من الدرجة الأولى .

(٤) عند إيجاد باقي قسمة ق(س) على هـ(س) ،

- إذا كانت هـ(س) = س − أ فإن الباقي = ق(أ)
- إذا كانت هـ(س) = س + أ فإن الباقي = ق(− أ)
- إذا كانت هـ(س) = أ س − ب فإن الباقي = ق $\left(\frac{\text{ب}}{\text{أ}}\right)$
- إذا كانت هـ(س) = أ س + ب فإن الباقي = ق $\left(\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}\right)$

نظرية العوامل : كثيرة الحدود ق(س) تقبل القسمة على كثيرة الحدود هـ(س) = س − أ إذا و إذا فقط كان : ق(أ) = صفر وفي هذه الحالة يسمى (س − أ) عاملاً من عوامل ق(س)

جذور كثيرة الحدود : يقال للعدد أ إنه جذراً لكثيرة الحدود ق(س) إذا كان : ق(أ) = صفر

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان ق(أ) = ٠ فإن :

① أ جذراً لكثيرة الحدود ق(س)

② (س − أ) عاملاً من عوامل ق(س)

③ ق(س) تقبل القسمة على (س − أ)

④ باقي قسمة ق(س) على (س − أ) = ٠

(٢) إذا كان ق(س) تقبل القسمة على (س − أ) في هذه الحالة يوجد كثيرة حدود ل(س) بحيث أن :

ق(س) = (س − أ) . ل(س)

و في هذه الحالة هناك حالتان :

- ل(أ) ≠ ٠ و في هذه الحالة نقول أن أ جذر بسيط لـ ق(س)
- ل(أ) = ٠ و في هذه الحالة نقول أن أ جذر مكرر لـ ق(س)

(٣) إذا كان أ جذراً مكرر ن مرة ، ن ∈ ط فإن :

ق(س) تقبل القسمة على (س − أ)^{ن}

كتابة كثيرة الحدود بمعلومية جذورها :

إذا كانت أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، أ$_{٣}$ ، .... ، أ$_{ن}$ جذوراً حقيقية مختلفة لكثيرة الحدود ق(س) فإن ق(س) تقبل القسمة على هـ(س) حيث ، هـ(س) = (س − أ$_{١}$) (س − أ$_{٢}$) (س − أ$_{٣}$) .... (س − أ$_{ن}$)

ملاحظة هامة :

اي كثيرة حدود ق(س) من الدرجة ن (ن > ٠) يمكن ان يكون لها على الأكثر ن من الجذور المختلفة

النظرية الأساسية للجبر

اي كثيرة حدود ق(س) من الدرجة ن (ن > ٠) لها على الأقل جذر واحد في ك وعلى الأكثر ن من الجذور المختلفة

نتائج هامة :

(١) اي كثيرة حدود ق(س) درجتها ن > ٠ لابد ان يكون لها جذر مركب واحد على الأقل .

(٢) اي كثيرة حدود ق(س) درجتها ن > ٠ لها بالضبط ن من الجذور المركبة (ليس من الضروري ان تكون الجذور مختلفة)

(٣) كل جذر حقيقي لكثيرة الحدود هو جذر مركب لها و العكس غير صحيح

ملاحظات هامة :

(١) العدد أ + ب ت مرافقه هو العدد أ − ب ت

(٢) اي كثيرة حدود ق(س) من الدرجة ن عدد فردي لها على الأقل جذر واحد حقيقي

(٣) إذا كانت ق(س) ∈ ح [س] و كان لها الجذر (أ + ب ت) فإن مرافقه (أ − ب ت) جذرا لها ايضاً

الزمر $\sum$ يقرأ (سيجما) ويعني مجموع :

$$\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{س}_1 + \text{س}_2 + \text{س}_3 + \cdots\cdots + \text{س}_{\text{ن}}$$

مبدأ العد : إذا امكن إجراء عملية بطرق مختلفة عددها م ، وكان لدينا في نفس الوقت عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق عددها ن فإن ، عدد طرق إجراء العمليتين معاً = م × ن

ملاحظة هامة : مبدا العد السابق يمكن تطبيقه على الحالة التي يكون فيها اكثر من عمليتين كل واحدة منها يمكن إجراؤها بعدد معين من الطرق المختلفة فيكون ،
عدد طرق إجراء هذه العمليات مجتمعة = حاصل ضرب عدد طرق إجراء كل عملية على حدة .

التباديل : إذا كانت س عدد عناصرها ن فإن عدد التباديل لعناصر س مأخوذة راء راء يُرمز لها بالرمز ($^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$) حيث ر ≤ ن حيث ،

$$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\ldots\ldots(\text{ن}-\text{ر}+1)$$

* إذا كانت س مجموعة عدد عناصرها ن فإن ،

عدد تباديل س = ن (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) ......× ٢ × ١

ملاحظة :

عدد تباديل س = ن (ن − ١) (ن − ٢) ......× ٢ × ١ = ن!

الرمز ن! (يقرا ، ن عاملي او مضروب ن)

اي ان ، ن! = حاصل ضرب عوامل عددها ن تبدا بالعدد ن وكل منها ينقص عن سابقه بمقدار واحد وينتهي دائماً بالعدد واحد .

قوانين التباديل :

مثال توضيحي	القانون
$^{٣}ل_{٢} = ٣ \times ٢ = ٦$ ، $^{٦}ل_{٣} = ٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$	(١) $^{ن}ل_{ر} = ن(ن-١)(ن-٢) \ldots \times (ن-ر+١)$ حيث عدد العوامل $= ر$ ، $ر \leq ن$
$^{٣}ل_{٣} = ٣! = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$	(٢) $^{ن}ل_{ن} = ن! = ن \times (ن-١) \ldots \times ٢ \times ١$
$٧! = ٧ \times ٦! = ٧ \times ٦ \times ٥!$ وهكذا .	(٣) $ن! = ن(ن-١)! = ن(ن-١)(ن-٢)!$ (يستخدم غالباً لاختصار المضروبات)
$^{٥}ل_{٢} = \frac{٥!}{٣!}$ ، $^{٧}ل_{٣} = \frac{٧!}{٤!}$	(٤) $^{ن}ل_{ر} = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ (يستخدم غالباً عندما تكون ر غير معلوم قيمتها العددية اي رمزاً)
$^{٣}ل_{٠} = ١$ ، $^{٥}ل_{١} = ٥$	(٥) $٠! = ١$ ، $١! = ١$ ، $^{ن}ل_{٠} = ١$ ، $^{ن}ل_{١} = ن$

مجموعة القوة لمجموعة :

المجموعة التي عناصرها جميع المجموعات الجزئية لمجموعة س تسمى مجموعة القوة للمجموعة س ونرمز لها بالرمز ق (س)

وإذا كان عدد عناصر س = ن فإن عدد عناصر مجموعة القوة لـ س $= ٢^{ن}$

التوافيق :

هي المجموعات التي يمكن تكوينها باختيار عدد معين من الأشياء دون مراعاة الترتيب .

إذا كانت س مجموعة عدد عناصرها ن فإن عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصر كل منها ر يساوي ، $\frac{^{ن}ل_{ر}}{ر!}$ ويرمز لها بالرمز $\binom{ن}{ر}$ ويقرأ (ن فوق ر) وتسمى بعدد التوافيق

قوانين التوافيق :

مثال توضيحي	القانون
$\binom{٥}{٣} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$	(١) $\binom{ن}{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{ر!} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢) \times \ldots \times (ن-ر+١)}{ر(ر-١) \times \ldots \times ٢ \times ١}$
$\binom{٦}{٢} = \frac{٦!}{٢! \cdot ٤!} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤!}{٢ \times ٤!} = ١٥$	(٢) $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر! \cdot (ن-ر)!}$ يفضل استخدامه إذا كانت ر غير معلوم قيمتها العددية .
$\binom{٩}{٠} = ١$ ، $\binom{٥}{٠} = ١$ ، $\binom{٣}{٣} = ١$	(٣) $\binom{ن}{٠} = ١$ ، $\binom{ن}{ن} = ١$ ، $\binom{ن}{١} = ن$
$\binom{٥}{٠} + \binom{٥}{١} + \ldots + \binom{٥}{٥} = ٢^{٥} = ٣٢$	(٤) $\binom{ن}{٠} + \binom{ن}{١} + \ldots + \binom{ن}{ر} + \ldots + \binom{ن}{ن} = ٢^{ن}$
$\binom{٧}{٣} = \binom{٧}{٧-٣} = \binom{٧}{٤}$	(٥) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ ويسمى قانون التبسيط
$\binom{٧}{٢} \div \binom{٧}{١} = \frac{٧-٢+١}{٢} = \frac{٦}{٢}$	(٦) $\binom{ن}{ر} \div \binom{ن}{ر-١} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ (قانون النسبة)
$\binom{٥}{٣} + \binom{٥}{٢} = \binom{٦}{٣}$	علاقة الكرخي (٧) $\binom{ن}{ر} + \binom{ن}{ر-١} = \binom{ن+١}{ر}$

ملاحظة هامة :

(١) إذا كانت $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{هـ}$ فإن : ر = هـ أو ر + هـ = ن (٢) $\binom{ن}{ن-١} = ن$

تذكر أن :

$(أ \pm ب)^{٢} = أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢}$ ، $(أ \pm ب)^{٣} = أ^{٣} \pm ٣أ^{٢}ب + ٣أب^{٢} \pm ب^{٣}$

نظرية ذات الحدين :

إذا كان ن عدد صحيح موجب فإن :

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + \binom{\text{ن}}{١}\text{أ}^{\text{ن}-١}\text{ب} + \binom{\text{ن}}{٢}\text{أ}^{\text{ن}-٢}\text{ب}^{٢} + \cdots + \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\text{ب}^{\text{ر}} + \cdots + \text{ب}^{\text{ن}}$$

$$= \sum_{\text{ر}=٠}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,.\,\text{ب}^{\text{ر}}$$

ملاحظات هامة :

(١) تستخدم هذه النظرية لإيجاد مفكوك أو منشور $(\text{أ} \pm \text{ب})^{\text{ن}}$ (٢) عدد الحدود في المفكوك = ن + ١

(٣) اسس أ متناقصة بالتدريج بمقدار واحد وأسس ب متزايدة بالتدريج بمقدار واحد .

(٤) مجموع الأسين أ ، ب في أي حد = ن (٥) معامل الحد الأول في المفكوك يساوي معامل الحد الأخير .

الحد العام في مفكوك ذات الحدين :

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}}\text{أ}^{\text{ن}-\text{ر}}\,.\,\text{ب}^{\text{ر}}$$

يمكن كتابة أي حد على الصورة : $\binom{\text{ن}}{\text{ترتيب الحد} - ١} \times \text{ب}^{(\text{ترتيب الحد} - ١)} \times \text{أ}^{\text{ن} - \text{ترتيب الحد} + ١}$

إيجاد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في مفكوك ذات الحدين :

في مفكوك $(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}}$ لدينا حالتان :

أولاً : إذا كان ن عدداً زوجياً فإن عدد حدود المفكوك يكون فردياً ويكون هناك حد أوسط واحد ويكون :

ترتيب الحد الأوسط = $\frac{\text{ن}}{٢} + ١$

ثانياً : إذا كان ن عدداً فردياً فإن عدد حدود المفكوك يكون زوجياً ويكون هناك حدين أوسطين ويكون :

ترتيب الحدين الأوسطين = $\frac{\text{ن}+١}{٢}$ ، $\frac{\text{ن}+٣}{٢}$

المتتابعات الحسابية :

المتتابعة الحسابية : هي متتابعة تتزايد حدودها أوتتناقص بمقدار ثابت .

تسمى المتتابعة $\{\text{ح}_{\text{ن}}\}$ متتابعة حسابية إذا كان : $\text{ح}_{\text{ن}+١} - \text{ح}_{\text{ن}} = \text{ء}$ لكل ن $\in$ ط

حيث ء مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة

بمعنى أن : أساس المتتابعة الحسابية = أي حد فيها - الحد السابق له مباشرة

ملحوظة : إذا كانت ء > ٠ تكون المتتابعة تزايدية وإذا كانت ء < ٠ تكون المتتابعة تناقصية

الحد العام في المتتابعة الحسابية :

إذا كانت { $ح_{ن}$ } متتابعة حسابية حدها الأول = أ وأساسها ء فإن حدها العام يكون على الصورة :

$ح_{ن} = أ + (ن - ١)ء$ حيث ن رتبة الحد .

فمثلاً : $ح_{٥} = أ + ٤ء$ ، $ح_{٩} = أ + ٨ء$ ، $ح_{٢٠} = أ + ١٩ء$

الصورة العامة للمتتابعة الحسابية :

المتتابعة الحسابية تأخذ الصورة : $\boxed{(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، أ + ٣ء ، ....)}$

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية وعدد حدودها = ن فإنه يرمز لحدها الأخير بالرمز ل حيث

$\boxed{ل = أ + (ن - ١)ء}$ ، ن عدد الحدود

(٢) لإيجاد رتبة الحد الذي يساوي قيمة معلومة س نضع $\boxed{ح_{ن} = س}$ ونوجد قيمة ن

(٣) لإيجاد رتبة أول حد موجب في المتتابعة الحسابية نضع $\boxed{ح_{ن} > ٠}$

(٤) لإيجاد رتبة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية نضع $\boxed{ح_{ن} < ٠}$

(٥) المتتابعة { $ح_{ن}$ } تكون متابعة حسابية إذا وفقط إذا كان $ح_{ن}$ مقداراً من الدرجة الأولى في ن

إدخال عدة أوساط حسابية بين عددين :

إذا كانت أ ، ب كميتين معلومتين وأردنا إدخال ك من الأوساط الحسابية بينهما فإنه ينتج لدينا متتابعة حسابية حدها الأول أ وعدد حدودها ك + ٢ وحدها الأخير ب .

ملاحظات هامة :

(١) عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢ (٢) الوسط الحسابي للعددين أ ، ب يساوي $\frac{أ + ب}{٢}$

المتتابعات الهندسية :

تسمى المتتابعة { $ح_{ن}$ } حيث $ح_{ن} \neq ٠$ متتابعة هندسية إذا كان :

$\frac{ح_{ن+١}}{ح_{ن}}$ = مقداراً ثابتاً لكل ن ∈ ط

وهذا المقدار الثابت يسمى أساس المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز ر

أي أن : $\boxed{ر \text{ (أساس المتتابعة الهندسية) } = \frac{\text{أي حد فيها}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}}$

الحد العام في المتتابعة الهندسية :

إذا كانت { $ح_ن$ } متابعة هندسية حدها الأول = أ ، واساسها ر فإن حدها العام يكون على الصورة ،

$ح_ن = أ ر^{ن-1}$ حيث ن- رتبة الحد . حيث نلاحظ ان ، $ح_1 = أ$ ، $ح_2 = أ ر$ ، $ح_3 = أ ر^2$ ، ....

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية :

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية وهي ، $\boxed{(أ ، أ ر ، أ ر^2 ، أ ر^3 ، ....)}$

ملاحظات هامة :

(١) الوسط الهندسي لكميتين (موجبتين معاً او سالبتين معاً) هو الجذر التربيعي لحاصل ضربهما اي ان

الوسط الهندسي للكميتين أ ، ب= $\pm \sqrt{أ ب}$

(٢) الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين اكبر من الوسط الهندسي لهما .

المتسلسلات الحسابية المنتهية :

لتكن $جـ_م = \sum_{ن=1}^{م} ح_ن$ حيث { $ح_ن$ } متتابعة حسابية حدها الأول أ واساسها ء فإن مجموع اول م حداً يعطى بأحد العلاقتين ،

$جـ_م = \frac{م}{2}[2أ + (م-1)ء]$ او $جـ_م = \frac{م}{2}[أ + ح_م]$

حيث أ الحد الأول ، ء الأساس ، م عدد الحدود ، $ح_م$ الحد الأخير ، $جـ_م$ مجموع الحدود

ملاحظات هامة :

(١) لإيجاد المجموع $جـ_ن$ يلزم معرفة عدد الحدود ن وإذا لم تكن معلومة نوجدها من القانون ،

$ح_ن = أ + (ن - 1) ء$

(٢) $جـ_ن - جـ_{ن-1} = ح_ن$ اي ان ، $جـ_{10} - جـ_9 = ح_{10}$ ، $جـ_{13} - جـ_{12} = ح_{13}$ ، .... وهكذا

المتسلسلات الهندسية المنتهية :

إذا كانت $\sum_{ن=1}^{م} ح_ن$ متسلسلة هندسية عدد حدودها م حيث { $ح_ن$ } متتابعة هندسية حدها الأول أ واساسها ر فإن ، $جـ_م = \frac{أ(ر^م - 1)}{ر - 1}$ حيث ر ≠ ١ بدلالة أ ، ر ، م

ملاحظة هامة : مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول أ واساسها ر وحدها الأخير ل يعطى بالقانون :

$جـ_م = \frac{ل ر - أ}{ر - 1}$ حيث ر ≠ ١

نهاية المتتابعات الغير منتهية :

المتتابعة $\{ \text{ح}_{\text{ن}} \}_{\text{ن}=1}^{\infty}$ غير المنتهية فإذا كان ل ∈ ح حيث $\text{ح}_{\text{ن}} \xrightarrow{\text{تقترب من}} \text{ل}$ عندما ن $\leftarrow \infty$

فإنه يقال للمتتابعة إنها متقاربة ولها النهاية ل ويكون $|\text{ح}_{\text{ن}} - \text{ل}| \leftarrow 0$ عندما ن $\leftarrow \infty$

وتكتب على الصورة : $\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \text{ح}_{\text{ن}} = \text{ل}$

خواص النهايات :

(١) المتتابعة $\{ \text{ح}_{\text{ن}} \}$ والتي فيها $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جـ}$ حيث جـ ثابت لجميع قيم ن تكون متقاربة بمعنى أن : $\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \text{جـ} = \text{جـ}$

(٢) $\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{\text{ن}} =$ صفر

(٣) إذا كان $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}^{\text{م}}}$ فإن $\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \frac{1}{\text{ن}^{\text{م}}} =$ صفر حيث م ∈ ط

(٤) إذا كانت $\text{ح}_{\text{ن}} = \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}}$ فإن :

$$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{1}{\text{ب}}\right)^{\text{ن}} = \begin{cases} \text{صفر} & \text{عندما } \left|\frac{1}{\text{ب}}\right| < 1 \\ \infty & \text{عندما } \left|\frac{1}{\text{ب}}\right| > 1 \end{cases}$$

(٥) المتتابعة $\{ \frac{\text{أ}}{\text{جـ}^{\text{ن}}} \}$ متقاربة إلى الصفر والمتتابعة $\{ \text{أ جـ}^{\text{ن}} \}$ متباعدة إلى مالانهاية حيث ($\text{جـ} > 1$)

(٦) المتتابعة $\{ \text{أ ء}^{\text{ن}} \}$ متقاربة إلى الصفر والمتتابعة $\{ \frac{\text{أ}}{\text{ء}^{\text{ن}}} \}$ متباعدة إلى مالانهاية حيث ($0 < \text{ء} < 1$)

(٧) نهاية مجموع عدة متتابعات يساوي مجموع نهاية كل متتابعة على حدى

(٨) نهاية حاصل ضرب عدة متتابعات يساوي حاصل ضرب نهايات المتتابعات

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{كثيرة حدود في ن}}{\text{كثيرة حدود في ن}}$

فإن :
$$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نهـا}} \text{ح}_{\text{ن}} = \begin{cases} (1)\ \frac{\text{معامل أكبر قوة في البسط}}{\text{معامل أكبر قوة في المقام}} & \text{عندما درجة البسط = درجة المقام} \\ (2)\ \infty & \text{عندما درجة البسط > درجة المقام} \\ (3)\ \text{صفر} & \text{عندما درجة البسط < درجة المقام} \end{cases}$$

(٢) يمكننا التخلص من الجذر في بسط أي مقدار بضرب بسط هذا المقدار ومقامه في مرافق الجذر .

حيث مرافق المقدار $\sqrt{\text{أ}} + \sqrt{\text{ب}}$ هو المقدار $\sqrt{\text{أ}} - \sqrt{\text{ب}}$

المتسلسلات غير المنتهية :

إذا كانت المتسلسلة جـ : $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ح}_{\text{ن}}$ متقاربة فإن $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \text{ح}_{\text{ن}}$ = صفراً .

والعكس غير صحيح بمعنى أنه من الممكن ان يكون $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \text{ح}_{\text{ن}}$ = صفراً والمتسلسلة تباعدية .

ملاحظات هامة :

(١) المتسلسلة جـ : $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{ح}_{\text{ن}}$ تكون تباعدية عندما يكون $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \text{ح}_{\text{ن}} \neq 0$.

(٢) المتسلسلات الحسابية الغير منتهية دائماً تباعدية .

(٣) المتسلسلة جـ : $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ن}}$ متباعدة على الرغم من ان $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{1}{\text{ن}}$ = صفراً

المتسلسلات الهندسية الغير منتهية :

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{أ}\,\text{ر}^{\text{ن}-1}$ تكون تقاربية إذا كان $|\text{ر}| < 1$

وفي هذه الحالة يكون مجموعها يعطى بالعلاقة : $\text{جـ} = \frac{\text{أ}}{1-\text{ر}}$

ملحوظة هامة :

انتبه أيها الطالب إلى الخلط الذي يحدث في دراسة تقارب المتتابعة $\{\text{أ}_{\text{ن}}\}_{\text{ن}=1}^{\infty}$ والمتسلسلة $\sum_{\text{ن}=1}^{\infty} \text{أ}_{\text{ن}}$

في المتتابعة إذا كان $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \text{أ}_{\text{ن}}$ = عدد $\therefore$ المتتابعة تقاربية

في المتسلسلة إذا كان $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نهـــا}}\ \text{أ}_{\text{ن}}$ = عدد $\therefore$ المتسلسلة تباعدية

إشارة المقدار الجبري :

يقصد بها : تحديد الفترات التي يكون فيها المقدار الجبري :

(١) موجباً (منحنى الدالة يقع أعلى محور س) (٢) سالباً (منحنى الدالة يقع تحت محور س)

(٣) مساوياً للصفر (منحنى الدالة يقطع محور س)

أولاً : إشارة دالة الدرجة الأولى :

د(س) = أ س + ب حيث أ ، ب $\in$ ح ، أ $\neq$ ٠

ثانياً : إشارة الدالة من الدرجة الثانية :

د (س) = أ س^2 + ب س + جـ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ ٠

أولاً : إذا كان ر = ب^2 − ٤ أ جـ > ٠ (المميز موجباً) فإن للدالة جذران هما ل ، م وتكون الإشارة كما يلي

−∞ ل م ∞

إشارة د(س) : مثل إشارة أ | عكس إشارة أ | مثل إشارة أ

ثانياً : إذا كان ر = ب^2 − ٤ أ جـ = ٠ (المميز = ٠) فإن للدالة جذر واحد مكرر هو $\frac{-ب}{٢أ}$ وتكون الإشارة:

−∞ $\frac{-ب}{٢أ}$ ∞

إشارة د(س) : مثل إشارة أ | مثل إشارة أ

ثالثاً : إذا كان ر = ب^2 − ٤ أ جـ < ٠ (المميز سالباً) فإن ليس للدالة جذور حقيقية وتكون الإشارة

−∞ ∞

إشارة د(س) : مثل إشارة أ

مجالات بعض الدوال

الدالة	مجالها
(١) كثيرة الحدود	ح
(٢) الكسرية : $\frac{ق(س)}{ر(س)}$	الدالة معرفة بشرط المقام ≠ ٠ ⟸ ر(س) ≠ ٠ ∴ المجال = ح − { اصفار المقام }
(٣) الجذرية : $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن عدد زوجي موجب	الدالة معرفة بشرط ما تحت الجذر ≥ ٠ ∴ هـ (س) ≥ ٠
(٤) الجذرية : $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن عدد فردي موجب	∴ المجال = ح
(٥) اللوغاريتمية : لو (ر(س))	الدالة معرفة بشرط ما بعد اللوغاريتم > ٠ ∴ ر(س) > ٠
(٦) الكسرية الجذرية : $\frac{ق(س)}{\sqrt[ن]{ر(س)}}$ حيث ن زوجي	الدالة معرفة بشرط ما تحت الجذر > ٠ ∴ ر(س) > ٠
(٧) الكسرية الجذرية : $\frac{ق(س)}{\sqrt[ن]{ر(س)}}$ حيث ن فردي	الدالة معرفة بشرط ما تحت الجذر ≠ ٠ ∴ المجال = ح − { اصفار ر(س) }

بعض خواص الدوال الحقيقية :

[١] الدوال الدورية :

(١) دالة الجيب : د (س) = جا س * مجالها = ح * مداها = [-١ ، ١] دالة دورية دورها ٢ ط

(٢) دالة جيب التمام : د (س) = جتا س * مجالها = ح * مداها = [-١ ، ١] دالة دورية دورها ٢ ط

(٣) دالة الظل : د (س) = ظا س * مداها = ح دالة دورية دورها ط

ملاحظات :

(١) دور الدالة جا (أ س + ب) هو $\frac{٢ ط}{|أ|}$

(٢) دور الدالة جتا (أ س + ب) هو $\frac{٢ ط}{|أ|}$

(٣) دور الدالة ظا (أ س + ب) هو $\frac{ط}{|أ|}$

[٢] الدالة الزوجية والدالة الفردية :

(١) الدالة د التي مجالها ف تسمى دالة زوجية إذا كان د (-س) = د (س) لكل س ، -س ∋ ف

(٢) الدالة د التي مجالها ف تسمى دالة فردية إذا كان : د (-س) = - د (س) لكل س ، -س ∋ ف

ملاحظات :

(١) منحنى الدالة الزوجية متماثل حول محو الصادات

اي ان إذا كانت النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تقع على المنحنى فإن النقطة ($-س_١$ ، $ص_١$) تقع على المنحنى

(٢) منحنى الدالة الفردية متماثل حول نقطة الأصل

اي ان إذا كانت النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) تقع على المنحنى فإن النقطة ($-س_١$ ، $-ص_١$) تقع على المنحنى

(٣) جا (-س) = - جا س (دالة الجيب تطرد الإشارة السالبة)

جتا (-س) = جتا س (دالة جيب التمام تبتلع الإشارة السالبة)

ظا (-س) = - ظا س (دالة الظل تطرد الإشارة السالبة)

| -س | = | س |

[٢] إطراد الدوال (تزايد أو تناقص الدالة) :

لتكن الدالة د معرفة على ف ⊂ ح فإن :

(١) د تزايدية في ف ⟺ $س_١$ < $س_٢$ ⟸ د ($س_١$) ≥ د ($س_٢$) لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∋ ف ،

(٢) د تزايدية فعلاً في ف ⟺ $س_١$ < $س_٢$ ⟸ د ($س_١$) < د ($س_٢$) لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∋ ف ،

(٣) د تناقصية في ف ⟺ $س_١$ < $س_٢$ ⟸ د ($س_١$) ≤ د ($س_٢$ لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∋ ف ،

(٤) د تناقصية فعلاً في ف ⟺ $س_١$ < $س_٢$ ⟸ د ($س_١$) > د ($س_٢$) لكل $س_١$ ، $س_٢$ ∋ ف ،

[٤] الدوال المحدودة :

إذا كان لدينا د مجالها ف فإننا نقول أن :

(١) الدالة محدودة من اعلى إذا وُجد عدد ل ∈ ح بحيث د (س) ⩽ ل لكل س ∈ ف

(٢) الدالة محدودة من اسفل إذا وُجد عدد م ∈ ح بحيث د (س) ⩾ م لكل س ∈ ف

(٣) الدالة محدودة إذا كانت محدودة من اعلى ومحدودة من اسفل ونكتب ذلك : م ⩽ د (س) ⩽ ل

ويسمى م اكبر حد سفلي ، ل اصغر حد علوي

ملاحظات هامة :

(١) دالة الجيب وجيب التمام محدودة في أي فترة لأن : −١ ⩽ جا س ⩽ ١ ، −١ ⩽ جتا س ⩽ ١

(٢) اي عدد على صورة مربع كامل يكون ⩾ ٠ لكل س ∈ ح (٣) اي عدد مربع + اي عدد موجب > ٠

(٤) الدالة د (س) = | س | محدودة من اسفل ومداها [٠ ، ∞)

نهاية الدالة عند نقطة :

إذا كانت د (س) معرفة على ف = (ب ، جـ) باستثناء النقطة أ ∈ (ب ، جـ) فإننا نقول ان د (س) تقترب من العدد ل حيث تقترب س من أ ونكتب

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ل او د (س) ← ل عندما س ← أ

إذا كان النهايتان اليمنى واليسرى للدالة د عند النقطة أ متساويتين وقيمة كل منهما ل

ملاحظة :

إذا لم تكن د (س) معرفة على الفترة (أ ، ∞) فإن $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}$ د (س) غير موجودة .

وكذلك إذا لم تكن د (س) معرفة على الفترة (−∞ ، أ) فإن $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهـــا}}$ د (س) غير موجودة .

بعض خواص النهايات :

نهاية دالة كثيرة حدود :

(١) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ث = ث حيث ث ثابت ، أ ∈ ح (مجال الدالة)

(٢) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ $س^{ن}$ = $أ^{ن}$ حيث ن ∈ ط ، أ ∈ ح

(٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (أ)

ملاحظة هامة :

إذا كانت الدالة كثيرة حدود فلإيجاد نهايتها عندما س ← أ نقوم بالتعويض المباشر بـ أ بدلاً من س .

نهاية الدالة عند النقطة التي يتغير بجوارها تعريف الدالة

إذا كانت الدالة معرفة على أكثر من قاعدة

* نوجد كلاً من النهاية اليمنى والنهاية اليسرى ونقارن بينهما .

إذا كانت الدالة دالة قيمة مطلقة (مقياس)

* نقوم بإعادة التعريف .
* نوجد النهاية .

تذكر أن :

* الكمية الغير معينة : هي التي لا نستطيع ان نجد لها جواباً محدداً .

لذلك فإن : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة حيث يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية التي إذا ضُربت في الصفر كان الناتج صفراً .

* الكمية الغير معرفة : هي تلك التي لا معنى لها مثل $\frac{أ}{\text{صفر}}$ ، $أ \neq 0$

حالات عدم التعيين :

إذا عوضنا تعويض مباشر في الدالة لإيجاد النهاية وظهرت إحدى الحالات الآتية :

$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $\infty - \infty$ تسمى حالات عدم التعيين فيجب التغلب على هذه الحالات لإيجاد النهاية

أولاً : كيفية التغلب على حالة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$:

[١] التحليل والاختصار ثم التعويض مرة أخرى .

لاحظ وتذكر أن : (١) $أ^2 - ب^2 = (أ - ب)(أ + ب)$ الفرق بين مربعين

(٢) $أ^3 - ب^3 = (أ - ب)(أ^2 + أ ب + ب^2)$ الفرق بين مكعبين

(٣) $أ^3 + ب^3 = (أ + ب)(أ^2 - أ ب + ب^2)$ مجموع مكعبين

(٤) $أ س^2 + ب س + جـ$ ← نحلل بالقانون ← إكمال المربع

(٥) التحليل بإخراج العامل المشترك .

[٢] الضرب × المرافق : عندما تحتوي الدالة على جذراً تربيعياً في بسطها أو مقامها أو كليهما .

ثانياً : كيفية التغلب على حالة $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$:

[١] قسمة كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعاً لأعلى قوة في المقام .

[٢] الضرب × المرافق .

ملاحظات هامة :

(١) $أ + \infty = \infty$ ، $أ - \infty = -\infty$ ، $أ - (-\infty) = \infty$ لكل $أ \in ح$

(٢) لكل $أ \in ح$

* عندما $أ > ٠$ يكون :

$أ \times \infty = \infty$ ، $أ \times -\infty = -\infty$

$\frac{\infty}{أ} = \infty$ ، $\frac{أ}{\infty} =$ صفر ، $\frac{-\infty}{أ} = -\infty$

* عندما $أ < ٠$ يكون :

$أ \times \infty = -\infty$ ، $أ \times -\infty = \infty$

$\frac{\infty}{أ} = -\infty$ ، $\frac{أ}{\infty} =$ صفر ، $\frac{-\infty}{أ} = \infty$

* عندما $أ = ٠$ يكون :

$٠ \times \infty =$ كمية غير معينة ، $٠ \times -\infty =$ كمية غير معينة

$\frac{\infty}{٠} =$ كمية غير معينة ، $\frac{-\infty}{٠} =$ كمية غير معينة

(٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{أ}{ب}\right)^{س} =$ صفر عندما $أ < ب$ ، $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{أ}{ب}\right)^{س} = \infty$ عندما $أ > ب$

، $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(\frac{أ}{ب}\right)^{س} = \infty$ عندما $أ < ب$ ، $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(\frac{أ}{ب}\right)^{س} =$ صفر عندما $أ > ب$

(٤) إذا كانت ، $د(س) = \frac{\text{كثيرة حدود من الدرجة م}}{\text{كثيرة حدود من الدرجة ن}}$

فإن ، $\lim\limits_{س \to \pm\infty} د(س) =$

① $\frac{\text{معامل أكبر أس في البسط}}{\text{معامل أكبر أس في المقام}}$ عندما درجة البسط = درجة المقام

② ∞ عندما درجة البسط > درجة المقام

③ صفر عندما درجة البسط < درجة المقام

بعض النظريات على النهايات :

النظرية الأولى :

إذا كانت كل من الدالتين $د_١$ ، $د_٢$ معرفة على الفترة ف − { أ }

وكانت : (١) $د_١$ محدودة في ف − { أ }   (٢) $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د_٢(س) = صفر$

فإن : $\boxed{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د_١(س) \times د_٢(س) = صفر}$

النظرية الثانية :

إذا كانت :

(١) $د_١$ ، $د_٢$ ، $د_٣$ ثلاث دوال معرفة على الفترة ف   (٢) $د_١(س) \leqslant د_٢(س) \leqslant د_٣(س)$ لكل س ∋ ف

(٣) وُجدت نقطة أ بحيث: $\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د_١(س) = \underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د_٣(س) = ل$

فإن : $\boxed{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} د_٢(س) = ل}$

النظرية الثالثة : (نهايات الدوال الدائرية)

إذا كانت س مقاسة بالتقدير الدائري فإن: $\boxed{\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جا س}{س} = ١}$

معنى النظرية : $\underset{الزاوية \leftarrow صفر}{نهـا} \frac{جا (الزاوية)}{الزاوية نفسها} = ١$ (ناتج التعويض المباشر يجب أن يكون $\frac{صفر}{صفر}$)

نتائج النظرية : (١) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{ظا س}{س} = ١$ (٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{س}{جا س} = ١$

(٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{س}{ظا س} = ١$ (٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{جا س}{ظا س} = ١$

النظرية الرابعة :

إذا كانت س مقاسة بالتقدير الدائري (الراديان) فإن:

$\boxed{\underset{س \leftarrow صفر}{نهـا} \frac{١ - جتا س}{س} = صفر}$

الاتصال عند نقطة :

إذا كانت د (س) معرفة على [أ ، ب] فإنه يقال للدالة د (س) أنها متصلة عند جـ ∋ (أ ، ب) إذا كان :

$$\text{نها}_{س \to ج^+} د(س) = د(ج) = \text{نها}_{س \to ج^-} د(س)$$

د متصلة من اليمين عند جـ

د متصلة من اليسار عند جـ

د متصلة عند جـ

ويمكن إثبات الاتصال عند جـ إذا كان : $\text{نها}_{س \to ج} د(س) = د(ج)$

ملاحظات :

(١) إذا كانت الدالة غير معرفة عند جـ فإن الدالة د غير متصلة عند جـ .

(٢) إذا كانت الدالة متصلة عند جـ فإن الدالة د معرفة عند جـ .

(٣) إذا كانت الدالة معرفة عند جـ فليس من الضروري أن تكون متصلة عندها .

(٤) دوال كثيرات الحدود دائماً متصلة على ح

(٥) مجموع دالتين متصلتين عند جـ يكون دالة متصلة عند جـ .

(٦) حاصل ضرب دالتين متصلتين عند جـ يكون دالة متصلة عند جـ .

(٧) قسمة دالتين متصلتين عند جـ يعطي دالة متصلة عند جـ بشرط المقام ≠ ٠ .

الهندسة

المضلع : هو شكل هندسي مغلق يتكون من اتحاد ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر في المستوى ، بحيث أن :

(١) القطع المستقيمة تتقاطع عند أطرافها فقط

(٢) كل طرف ينتمي إلى قطعتين مستقيمتان فقط

(٣) اي قطعتين مستقيمتين مشتركتين في طرف لا تكونان على استقامة واحدة

تعاريف خاصة بالمضلع :

(١) أضلاع المضلع : هي القطع المستقيمة الداخلة في تركيب المضلع .

(٢) رؤوس المضلع : هي النقاط التي تتقاطع عندها أضلاع المضلع .

(٣) قطر المضلع : هو كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين من المضلع .

(٤) زاوية المضلع : هي زاوية داخل المضلع ضلعاها هما ضلعين متجاورين في المضلع ورأسها نقطة تقاطعهما

(٥) محيط المضلع = مجموع اطوال أضلاعه

تنقسم المضلعات إلى :

مضلع محدب	مضلع مقعر
* إذا وقع المضلع بكامله في جهة واحدة بالنسبة لكل مستقيم يحوي ضلعاً من أضلاعه . بمعنى : (كل زاوية من زواياه الداخلية أقل من ١٨٠°)	* إذا وقع المضلع في جهتين مختلفتين بالنسبة لمستقيم يحوي ضلعاً من أضلاعه . بمعنى : (إحدى زواياه الداخلية أوأكثرتزيد عن ١٨٠°)

ملاحظة : إذا ذكرنا مضلعاً فإننا نعني المضلع المحدب .

تشابه المضلعات : يتشابه المضلعين إذا :

(١) كان لهما نفس عدد الأضلاع . (٢) تساوت زواياهما المتناظرة . (٣) تناسبت أضلاعهما المتناظرة .

ملاحظة هامة : المضلعات المتطابقة متشابهة .

نسبة التشابه : نسبة التشابه هي نسبة طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين .

* إذا تشابه مضلعان فإن :

(١) النسبة بين محيطيهما تساوي نسبة التشابه . (٢) النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه

ملاحظة : إذا كانت نسبة التشابه > ١ فإن أ هو المضلع الأكبر .

إذا كانت نسبة التشابه < ١ فإن ب هو المضلع الأكبر .

حالات تشابه مثلثين : يتشابه المثلثان في الحالات التالية :

(١) إذا تساوت زاويتان من أحدهما مع زاويتين من الآخر .

(٢) إذا تساوت زاوية مع أحدهما مع زاوية من الآخر وتناسب ضلعا تلك الزاوية مع ضلعي الزاوية الأخرى .

(٣) إذا تناسبت أضلاعهما .

ملاحظات :

(١) يتشابه المثلثان إذا تساوت زوايا أحدهما مع الزوايا المناظرة لها في المثلث الاخر

(٢) يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا تناسب ضلعا الزاوية القائمة من أحدهما مع ضلعا الزاوية القائمة في المثلث الآخر .

(٣) ارتفاع المثلث : هو القطعة المستقيمة الساقطة عمودياً من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له .

(٤) متوسط المثلث : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له .

نظريات هامة :

(١) إذا تشابه مثلثان فإن نسبة ارتفاعين متناظرين فيهما تساوي نسبة التشابه .

(٢) إذا تشابه مثلثان فإن نسبة طولي منصفي زاويتين داخليتين متناظرتين فيهما تساوي نسبة التشابه .

(٣) ذا تشابه مثلثان فإن نسبة طولي قطعتي مستقيم متوسطتين متناظرتين فيهما تساوي نسبة التشابه .

(٤) إذا تشابه مضلعان فإنه يمكن تقسيم كل منهما إلى مثلثات تتشابه مع نظائرها في المضلع الآخر .

بعض خواص المضلعات :

(١) عدد الأقطار المنطلقة من أحد رؤوس مضلع يعطى بالعلاقة : $\boxed{\text{عدد الأقطار = عدد الأضلاع} - ٣}$

(٢) الأقطار المنطلقة من احد رؤوس مضلع تقسمه إلى مثلثات : $\boxed{\text{عدد المثلثات = عدد الأضلاع} - ٢}$

بمعنى ان : إذا كان عدد أضلاع مضلع ما = ن ضلعاً فإن : $\boxed{\text{عدد الأقطار = ن} - ٣}$

$\boxed{\text{عدد المثلثات = ن} - ٢}$

(٣) مجموع زوايا المضلع الداخلية تعطى بالعلاقة : $\boxed{\text{مجموع زوايا المضلع = (ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}$

بينما عدد أضلاع المضلع يعطى بالعلاقة : $\boxed{\text{عدد أضلاع المضلع} = \frac{\text{مجموع زواياه}}{١٨٠^\circ} + ٢}$

المضلعات المنتظمة : المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متطابقة وزواياه متطابقة .

زوايا المضلع المنتظم :

مضلع منتظم عدد اضلاعه (ن) فإن :قياس زاوية المضلع المنتظم = $\dfrac{(\text{ن} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ن}}$

عدد اضلاع المضلع المنتظم ،عدد أضلاع المضلع المنتظم = $\dfrac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ - \text{قياس زاويته الداخلية}}$

ملاحظات :

(١) يتشابه مضلعان منتظمان إذا تساوى عدد أضلاعهما .

(٢) المضلع الذي تقع رؤوسه في منتصفات أضلاع مضلع منتظم هو مضلع منتظم يشابه المضلع الأكبر .

عامد المضلع المنتظم :

عامد المضلع المنتظم هو طول العمود النازل من مركز المضلع المنتظم على أحد أضلاعه .

مساحة المضلع المنتظم :

مساحة المضلع المنتظم تساوي نصف حاصل ضرب طول محيطه في عامده .

مساحة المضلع المنتظم = $\dfrac{١}{٢}\,\text{ح}\,\text{ع}$ حيث ح هو محيط المضلع ، ع طول عامد المضلع

ملحوظة : محيط المضلع المنتظم = طول ضلعه × عدد أضلاعه $\text{ح} = \text{ل} \times \text{ن}$

طول الضلع والعامد لبعض المضلعات المنتظمة :

المضلع	طول المضلع	طول العامد	محيطه	مساحته	الرسم
المربع	$\text{ل} = \text{نق}\sqrt{٢}$	$\text{ع} = \dfrac{\text{نق}\sqrt{٢}}{٢}$	$\text{ح} = ٤\,\text{نق}\sqrt{٢}$	$\text{م} = ٢\,\text{نق}^٢$	
المثلث المتطابق الأضلاع	$\text{ل} = \text{نق}\sqrt{٣}$	$\text{ع} = \dfrac{\text{نق}}{٢}$	$\text{ح} = ٣\,\text{نق}\sqrt{٣}$	$\text{م} = \dfrac{٣\,\text{نق}^٢\sqrt{٣}}{٤}$	
السداسي المنتظم	$\text{ل} = \text{نق}$	$\text{ع} = \dfrac{\text{نق}\sqrt{٣}}{٢}$	$\text{ح} = ٦\,\text{نق}$	$\text{م} = \dfrac{٣\,\text{نق}^٢\sqrt{٣}}{٢}$	

طرق قياس الزوايا

التقدير الستيني	التقدير الدائري
وحدته : الدرجة	وحدته : الراديان

تعريف الراديان :

الراديان هو قياس زاوية مركزية يكون طول القوس المقابل لها يساوي نصف قطر دائرتها .

$$\text{١ راديان} = \frac{\text{١٨٠}^\circ}{\text{ط}} \simeq \text{٥٧}^\circ\ \text{١٧}'\ \text{٤٥}''$$

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري :

$$\frac{\text{س}^\circ}{\text{١٨٠}^\circ} = \frac{\text{د}}{\text{ط}}$$

حيث س° هو القياس الستيني للزاوية ، د هو القياس الدائري للزاوية ، ط ≃ ٣.١٤

ملحوظة :

$$\text{س}^\circ = \frac{\text{د} \times \text{١٨٠}^\circ}{\text{ط}} \quad , \quad \text{د} = \frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$$

طول قوس في دائرة : إذا كانت (م ، نق) دائرة ، وكان ل طول قوس الدائرة المحصور بين ضلعي زاوية مركزية قياسها د راديانًا فإن ، ل = د × نق

ملاحظة هامة : بما ان ل = د × نق ، د = $\frac{\text{س}^\circ \times \text{ط}}{\text{١٨٠}^\circ}$ راديان

لذا إذا عُلم قياس الزاوية المركزية بالتقدير الستيني فإن ، ل = $\frac{\text{س}^\circ}{\text{١٨٠}^\circ}$ × ط نق

مساحة قطاع دائري :

قطاع دائري طول قوسه ل في دائرة نصف قطرها نق تكون

(١) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ ل نق (٢) مساحة القطاع الدائري = $\frac{1}{2}$ د نق^2

حيث د زاوية القطاع بالراديان ، نق نصف قطر دائرة القطاع .

معادلة الخط المستقيم :

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى في متغيرين :

أ س + ب ص = جـ (معادلة الخط المستقيم) حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ، ب لا يساويان الصفر معاً .

ميل الخط المستقيم :

يعتمد ميل الخط المستقيم على الزاوية التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

طرق إيجاد ميل الخط المستقيم :

(١) بدلالة إحداثيات نقطتين معلومتين عليه:

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :

$$\text{ميله } م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad \text{اي ان : الميل} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

(٢) إيجاد ميل المستقيم إذا علمت معادلته :

(أ) إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + د فإن الميل = م

(ب) إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$$

طرق إيجاد معادلة الخط المستقيم :

(١) بدلالة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات :

ص = م س + د حيث م تمثل ميله ، د تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات .

(٢) بدلالة الميل ونقطة تقع على المستقيم :

إذا كان المستقيم يمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) وميله م فإن معادلته هي : $ص - ص_١ = م (س - س_١)$

(٣) بدلالة نقطتين على المستقيم :

إذا كان المستقيم يمر بالنقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن معادلته هي :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين : إذا كانت معادلة المستقيم ل هي ص = م س + د ، معادلة المستقيم $ل'$ هي ص = $م'$ س + $د'$ فإن ل يوازي $ل'$ إذا وفقط إذا كان م = $م'$ اي ان : ل // $ل'$ $\Leftrightarrow$ م = $م'$

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان المستقيم يوازي المحور السيني فإن م = ٠

(٢) إذا كان المستقيم يوازي المحور الصادي فإن م غير معرف (٣) اي مستقيمان متوازيان لهما الميل نفسه

(٤) معادلة المستقيم الذي ميله م يمر بنقطة الأصل هي : ص = م س

(٥) معادلة المستقيم الذي يوازي محور السينات ويقطع من محور الصادات جزءاً طوله د هي : ص = د

(٦) معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله أ ويقطع من محور الصادات جزءاً طوله ب هي :

$$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$$

(٧) معادلة المستقيم الذي يوازي محور الصادات ويقطع من محور السينات جزءاً طوله جـ هي : س = جـ

العلاقة بين ميلي مستقيمين متعامدين :

إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلي مستقيمين متعامدين فإن : $م_١ \cdot م_٢ = -١$ أو $م_١ = \frac{-١}{م_٢}$

ملحوظة :

إذا كانت $أ = (س_١ ، ص_١)$ ، $ب = (س_٢ ، ص_٢)$ فإن

إحداثي منتصف $[أ ب] = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

مجموعة حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين :

طريقة المحددات :

تعريف المحددة : يسمى الشكل $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix}$ محددة من الدرجة الثانية

ويمكن إيجاد قيمة المحددة : $\begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أ د - جـ ب$

ملاحظات هامة :

(١) إذا كانت $\Delta \neq ٠$ فإن النظام له حل واحد وهو

$س = \frac{\Delta_س}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta}$ وفي هذه الحالة المستقيمان متقاطعان .

(٢) إذا كانت $\Delta = \Delta_س = \Delta_ص = ٠$ فإن النظام له عدد غير منته من الحلول وفي هذه الحالة المستقيمان منطبقان .

(٣) إذا كانت $\Delta = ٠$ ، $\Delta_س \neq ٠$ ، $\Delta_ص \neq ٠$ فإن النظام ليس له حل وفي هذه الحالة المستقيمات متوازيان .

(٤) إذا لم يذكر طريقة لحل النظام نختار أي طريقة للحل ولكن يفضل طريقة المحددات حيث أنها هي الطريقة الجديدة على دراستك .

بُعد نقطة عن مستقيم : بُعد النقطة ن $(س_١ ، ص_١)$ عن المستقيمالذي معادلته $أ س + ب ص + جـ = ٠$ هو :

$$\text{طول العمود} = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

ملاحظات هامة :

(١) لإيجاد البُعد بين مستقيمين متوازيين نتبع ما يلي :

(أ) نوجد نقطة ما على أحد المستقيمين ولتكن نقطة تقاطعه مع أحد المحورين . (ب) نحسب طول العمود النازل من هذه النقطة على المستقيم الآخر .

الدائرة :

الدائرة : هي مجموعة نقط المستوى التي تبعد مسافة ثابتة عن نقطة معلومة النقطة المعلومة تسمى (**المركز**) والمسافة الثابتة يسمى نصف القطر (نق).

الصور المختلفة لمعادلة الدائرة :

(١) معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق هي : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$

(٢) معادلة الدائرة التي مركزها (أ ، ب) ونصف قطرها نق هي : $(\text{س} - \text{أ})^2 + (\text{ص} - \text{ب})^2 = \text{نق}^2$

(٣) المعادلة العامة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ج}\,\text{س} + \text{د}\,\text{ص} + \text{هـ} = ٠$

(١) تمثل دائرة إذا كانت $\left(\frac{\text{ج}}{٢}\right)^2 + \left(\frac{\text{د}}{٢}\right)^2 - \text{هـ} > ٠$

(٢) تمثل نقطة واحدة إذا كانت $\left(\frac{\text{ج}}{٢}\right)^2 + \left(\frac{\text{د}}{٢}\right)^2 - \text{هـ} = ٠$

(٣) لا تمثل دائرة إذا كانت $\left(\frac{\text{ج}}{٢}\right)^2 + \left(\frac{\text{د}}{٢}\right)^2 - \text{هـ} < ٠$

ملاحظات هامة :

(١) المعادلة العامة للدائرة تفي بالشروط التالية : * معادلة من الدرجة الثانية في س ، ص

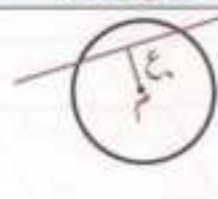
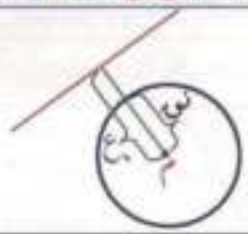
* معامل س^2 = معامل ص^2 * خالية من الحد س ص

(٢) المعادلة $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ج}\,\text{س} + \text{د}\,\text{ص} + \text{هـ} = ٠$ إذا كانت تمثل دائرة فيكون :

* مركزها = $\left(\frac{-\text{ج}}{٢} ، \frac{-\text{د}}{٢}\right)$ أي $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

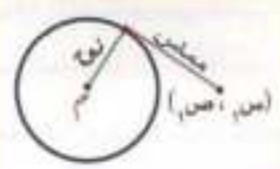
* نصف قطرها $\text{نق} = \sqrt{\left(\frac{\text{ج}}{٢}\right)^2 + \left(\frac{\text{د}}{٢}\right)^2 - \text{هـ}}$

أوضاع مستقيم بالنسبة لدائرة :

قاطع للدائرة	مماس للدائرة	لا يتقاطع مع الدائرة(خارج)
		
المستقيم يقطع الدائرة في نقطتين ويكون $\text{ع} < \text{نق}$	المستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة أي يكون مماساً للدائرة ويكون : $\text{ع} = \text{نق}$	المستقيم خارج الدائرة أي لا يقطع الدائرة نهائياً ويكون : $\text{ع} > \text{نق}$

ملاحظات هامة :

(١) طول المماس المرسوم من نقطة خارج دائرة إلى محيطها :



(أ) النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ومعادلة الدائرة $س^2 + ص^2 = نق^2$

∴ مربع طول المماس $= س_1^2 + ص_1^2 - نق^2$

(ب) النقطة $(س_1 ، ص_1)$ ومعادلة الدائرة $س^2 + ص^2 + جـ س + د ص + هـ = ٠$

∴ مربع طول المماس $= س_1^2 + ص_1^2 + جـ س_1 + د ص_1 + هـ$

(٢) أوضاع نقطة بالنسبة لدائرة هي :

* النقطة خارج الدائرة * النقطة داخل الدائرة * النقطة واقعة على الدائرة .

(٣) لتعيين موضع نقطة بالنسبة لدائرة معلومة :

نوجد مربع طول المماس المرسوم من النقطة للدائرة فإذا كان :

(أ) الناتج موجباً : كانت النقطة خارج الدائرة . (ب) الناتج سالباً : كانت النقطة داخل الدائرة .

(جـ) الناتج صفراً : كانت النقطة على الدائرة .

(٤) معادلة المماس لدائرة عند نقطة على محيطها :

(أ) معادلة المماس للدائرة $س^2 + ص^2 = نق^2$ والنقطة $(س_1 ، ص_1)$ الواقعة على محيطها هي :

$$س س_1 + ص ص_1 = نق^2$$

(ب) معادلة المماس للدائرة $س^2 + ص^2 + جـ س + د ص + هـ = ٠$ والنقطة $(س_1 ، ص_1)$ الواقعة على محيطها هي : $س س_1 + ص ص_1 + \frac{جـ}{2}(س + س_1) + \frac{د}{2}(ص + ص_1) + هـ = ٠$

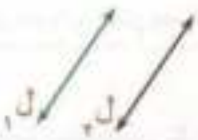
المستوى : المستوى هو السطح الذي له أخذنا فيه أي نقطتين مختلفتين ووصلنا بينهما بمستقيم لوقع المستقيم بأكمله على هذا السطح .

حالات تعيين المستوى : يتعين المستوى في كلٍ من الحالات التالية :

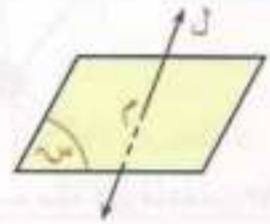
(١) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة  أ ، ب ، جـ لا تقع على استقامة واحدة ∴ أ ، ب ، جـ تكوّن المستوى س	(٢) مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه  جـ ∉ $\overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ، {جـ} يكونان المستوى س
(٣) مستقيمان متقاطعان  $ل_1 \cap ل_2 = \{م\}$ يكونان المستوى س	(٤) مستقيمان متوازيان  $ل_1 // ل_2$ يكونان المستوى س

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات في الفراغ :

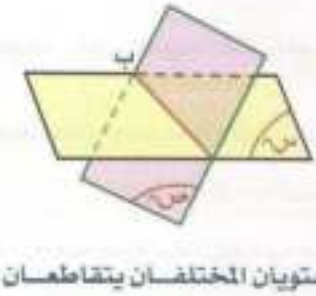
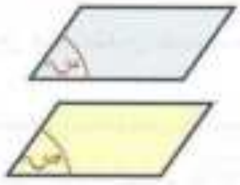
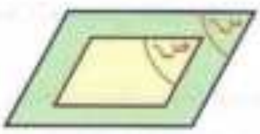
[١] الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفراغ :

(١) المستقيمان متقاطعان	(٢) المستقيمان متوازيان	(٣) المستقيمان متخالفان
		
المستقيمان يتقاطعان في نقطة $ل_1 \cap ل_2 = \{م\}$	المستقيمان لا يتقاطعان ويجمعهما مستوى واحد $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$	المستقيمان لا يتقاطعان ولا يجمعهما مستوى واحد $ل_1 \cap ل_2 = \emptyset$

[٢] الأوضاع النسبية بين مستقيم ومستوى في الفراغ :

(١) المستقيم يقطع المستوى	(٢) المستقيم يقع بأكمله في المستوى	(٣) المستقيم يوازي المستوى
		
المستقيم يقطع المستوى في نقطة $ل \not\subset س$ $\therefore$ $ل \cap س = \{م\}$	$ل \subset س$ $\therefore$ $ل \cap س = ل$	$ل \not\subset س$ $ل \cap س = \emptyset$ $\therefore$ $ل // س$

[٣] الأوضاع النسبية بين مستويين في الفراغ :

(١) المستويان متقاطعان	(٢) المستويان متوازيان	(٣) المستويان متطابقان
		
المستويان المختلفان يتقاطعان في مستقيم $س \cap ص = \overleftrightarrow{أب}$	المستويان لا يتقاطعان $س \cap ص = \emptyset$ $س // ص$	إذا اشتركا مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان . $س = ص$

نظريات وتعاريف :

(١) نسمى المستقيمين متخالفين إذا لم يوجد مستوٍ واحد يحويهما معاً ويقال عنهما " انهما غير مستويين معاً "

(٢) اي مستقيمان في الفراغ لا يتقاطعان إما أن يكونا متوازيان او متخالفان .

(٣) الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي إحدى الزوايا التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم مرسوم من نقطة عليه موازياً للآخر .

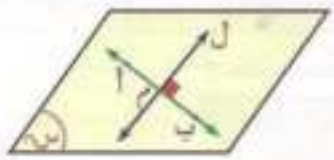
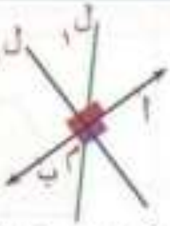
(٤) إذا تقاطع مستقيم مع مستوٍ لا يحتويه فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة .

(٥) لأي نقطة خارج مستوى معلوم هناك مستوى وحيد يمر بها ويوازي المستوى المعلوم .

(٦) إذا وقعت نقطة خارج مستقيم معلوم فإنه يمكن رسم مستقيم واحد منها يوازي المستقيم المعلوم .

تعامد مستقيم ومستوٍ :

سؤال : كم مستقيم عمودي يمكن رسمه على أ ب عند النقطة م ؟

في المستوى	في الفراغ
 في المستوى يمكن رسم عموداً واحداً على المستقيم أ ب عند م أ ب ⊂ س ∴ يوجد مستقيم واحد ل ⊂ س بحيث أ ب ⊥ ل	 في الفراغ يمكن رسم عدد غير منته من الأعمدة على أ ب عند م

المستقيم العمودي على مستوٍ :

يقال لمستقيم أنه عمودي على مستوٍ إذا كان هذا المستقيم عمودياً على كل مستقيم في المستوى ويمكن القول ايضاً بأن المستوى عمودي على المستقيم .

* المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين عند نقطة تقاطعهما يكوّن عمودياً على المستوى الذي يعينانه .

ملاحظة : إذا كان المكعب طول حرفه ل فيكون طول قطره $\sqrt{3}$ ل

نظريات هامـــة :

(١) إذا كان المستقيم ل يعامد المستوى س عند م فإن س يحتوي كل مستقيم عمودي على ل عند م .

(٢) إذا كان لدينا مستقيم ل وَ نقطة م (تقع او لا تقع على ل) فإن هنالك مستوياً ، ومستوياً واحداً فقط ، س يحتوي م ويعامد ل

(٣) إذا كان لدينا مستوٍ س ونقطة م (تقع او لا تقع في س) فإن هنالك مستقيماً ومستقيماً واحداً فقط يحتوي م ويعامد س

ملاحظات هامة :

(١) جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي لهذا المستقيم تقع جميعها في مستوٍ واحد عمودي على المستقيم المعلوم .

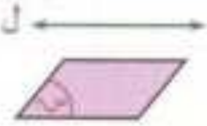
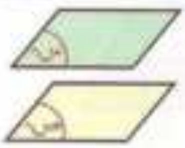
(٢) لا يمكن رسم أكثر من مستوٍ واحد يكون عمودياً على مستقيم معلوم ويمر بنقطة معلومة لا تنتمي لهذا المستقيم .

المسافة بين نقطة ومستوى :

المسافة بين نقطة م ومستوى س هي طول القطعة المستقيمة العمودية من م إلى س .

إذا كان م $\notin$ س ، [م ن] $\perp$ س $\quad\therefore$ المسافة بين م ، س = |م ن|

التوازي :

توازي مستقيمين	توازي مستقيم ومستوى	توازي مستويين
		
إذا كان ، ل // م فإن ، ل $\cap$ م = $\varnothing$	إذا كان ، ل // س ، ل $\not\subset$ س فإن ، ل $\cap$ س = $\varnothing$	إذا كان ، س // ص فإن ، س $\cap$ ص = $\varnothing$

نظريات هامة في التوازي :

(١) إذا وازى المستقيم ل المستوى س فكل مستقيم ك $\subset$ س إما يوازي ل أو يخالفه .

(٢) إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيماً في المستوى فإنه يوازي ذلك المستوى .

(٣) إذا قطع مستوٍ ما مستويين متوازيين فإنه يقطعهما في مستقيمين متوازيين .

نتائج هامة :

(١) إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم الذي يمر بأي نقطة من نقطة المستوى موازياً للمستقيم المعلوم يقع بتمامه في المستوى .

(٢) إذا قطع مستوى أحد مستقيمين متوازيين في نقطة واحدة فهو يقطع الآخر في نقطة واحدة .

(٣) المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان .

(٤) إذا توازى مستقيمان ومر بكلٍ منهما مستوى وتقاطع المستويان فإن خط تقاطعهما يوازي كلاً من هذين المستقيمين .

(٥) إذا قطع مستقيم أحد مستويين متوازيين فإنه يقطع الآخر .

(٦) إذا وازى مستقيم كلاً من مستويين متقاطعين فإنه يوازي خط تقاطعهما .

التوازي والتعامد:

ملاحظات هامة:

(١) يقال ان ل١ ، ل٢ متعامدان إذا كانت الزاوية بينهما قائمة .

(٢) إذا عامد مستقيم احد مستقيمين متوازيين فإنه يعامد الآخر .

(٣) إذا كان المستقيم ل ⊥ المستوى س~ عند م فهو يعامد كل مستقيم ك ⊂ س~ حتى وإن لم يمر بـ م

نظريات هامة في التعامد

(١) إذا عامد مستوٍ أحد مستقيمين متوازيين فهو يعامد الآخر .

(٢) أي مستقيمين عموديين على مستوٍ واحد متوازيان .

(٣) إذا عامد مستقيم احد مستويين متوازيين فإنه يعامد الآخر .

(٤) أي مستويين عموديين على مستقيم واحد متوازيان .

نتائج هامة:

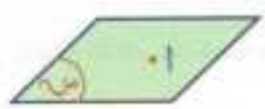
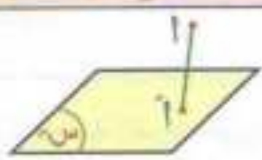
(١) المستقيم العمودي على كل من مستقيمين متقاطعين (دون أن يمر بنقطة تقاطعهما بالضرورة) يكون عمودياً على المستوى الذي يعينانه .

(٢) جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي لهذا المستقيم تقع جميعها في مستوٍ واحد عمودي على المستقيم المعلوم .

الإسقاط العمودي:

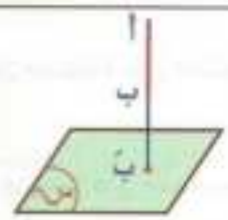
مسقط نقطة على مستوٍ :

تعريف : المسقط العمودي لنقطة معلومة على مستوٍ هو النقطة التي هي موقع القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة المعلومة على المستوى .

النقطة تقع على المستوى	النقطة لا تقع على المستوى
	
إذا كانت ، أ ∈ س~ فإن ، مسقط أ على س~ هو أ نفسها	إذا كانت ، أ ∉ س~ وكان ، أ أ' ⊥ س~ ، أ' ∈ س~ فإن ، أ' هي مسقط أ على المستوى س~

مسقط قطعة مستقيمة على مستوٍ :

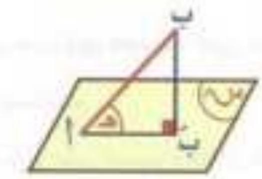
مسقط [أ ب] على المستوى س هو القطعة المستقيمة [أَ بَ] حيث أَ مسقط أ على س ، بَ مسقط ب على س .



إذا كان [أ ب] ⊥ س

فإن بَ هي مسقط [أ ب] على س

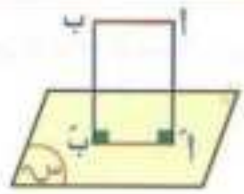
طول المسقط = صفر



إذا كان [أ ب] مائلة على س

فإن [أ بَ] هي مسقط [أ ب] على س

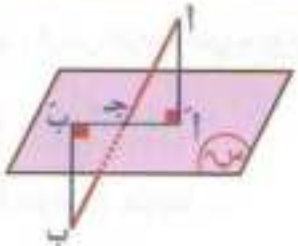
طول المسقط = | أ ب | جتا هـ



إذا كان [أ ب] // س

فإن [أَ بَ] هي مسقط [أ ب] على س

طول المسقط = طول [أ ب]



إذا كان [أ ب] قاطعة للمستوى س

فإن [أَ بَ] هي مسقط [أ ب] على س

الزاوية بين مستقيم ومستوٍ :

زاوية ميل مستقيم على مستوٍ هي الزاوية بين هذا المستقيم ومسقطه على المستوى .

نظرية :

الزاوية بين المستقيم ل والمستوى س هي أصغر زاوية يكوّنها ل مع أي مستقيم محتوى في س .

العلاقة بين طول قطعة مستقيمة وطول مسقطها على مستوٍ :

طول المسقط = طول القطعة المستقيمة × جيب تمام زاوية ميل المستقيم الحامل لها على المستوى

إذا كانت القطعة المستقيمة

- عمودية على المستوى
  فإن
  طول مسقطها = صفر
- مائلة بزاوية هـ على المستوى
  فإن
  طول مسقطها = طول القطعة المستقيمة × جتا هـ
- موازية للمستوى
  فإن
  طول مسقطها = طول القطعة المستقيمة

ملاحظات هامة :

(١) لإيجاد زاوية الميل لقطعة مستقيمة على مستوى ما فإن ، $\text{جتا هـ} = \dfrac{\text{طول المسقط}}{\text{طول القطعة المستقيمة}}$

(٢) إذا كان المائل على مستوى عمودياً على مستقيم في مستوى فإن مسقطه على المستوى يكون عمودياً أيضاً على ذلك المستقيم .

(٣) إذا رُسم مستقيم مائل على مستوٍ وكان مسقطه على المستوى عمودياً على مستقيم فيه كان هذا المستقيم المائل عمودياً على ذلك المستقيم .

الزوايا الزوجية :

جميع الزوايا المستوية لزاوية زوجية متطابقة .

قياس الزاوية الزوجية : قياس الزاوية الزوجية هو قياس أي زاوية من زواياها المستوية .

هندسة المتجهات

معيار القطعة المستقيمة الموجهة (طولها) :

إذا كان أ = (س_1 ، ص_1) ، ب = (س_2 ، ص_2) فإنه يمكن حساب طول القطعة المستقيمة [أ ب] من خلال العلاقة ، $|(\text{أ} ، \text{ب})| = |\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

ملاحظات هامة :

(١) $|\text{أ ب}| = |\text{ب أ}|$ (٢) (أ ، ب) ≠ (ب ، أ) لاختلافهما في الاتجاه

(٣) تمثل القطعة الموجهة (أ ، ب) هندسياً بسهم يتجه من أ إلى ب

(٤) القطعة الموجهة (أ ، أ) تنطبق نقطة البداية ونقطة النهاية وطولها يساوي صفر وليس لها اتجاه .

(٥) ميل القطعة المستقيمة الموجهة = $\dfrac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

∴ ميل (أ ، ب) = $\dfrac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

تعامد القطع المستقيمة الموجهة :

يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين إنهما متعامدتان إذا كان حاصل ضرب ميلهما يساوي (− ١)

أي أن ، (أ ، ب) ⊥ (جـ ، ء) $\Longleftrightarrow$ $\text{م}_{\text{أب}} \times \text{م}_{\text{جـ ء}} = -1$

توازي القطع المستقيمة الموجهة :

يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين إنهما متوازيتان إذا كان لهما نفس الميل (تساوي ميلهما) .

بمعنى ان ، $(\text{أ} ، \text{ب}) \,//\, (\text{جـ} ، \text{ء}) \Leftrightarrow \text{م}_{\text{أب}} = \text{م}_{\text{جـء}}$

∴ إذا كانت أ $= (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب $= (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$ ، جـ $= (\text{س}_3 ، \text{ص}_3)$ ، ء $= (\text{س}_4 ، \text{ص}_4)$ فإن ،

$$(\text{أ} ، \text{ب}) \,//\, (\text{جـ} ، \text{ء}) \Leftrightarrow \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_4 - \text{ص}_3}{\text{س}_4 - \text{س}_3}$$

القطعتان في اتجاه واحد إذا كانت إشارة كل من $(\text{س}_2 ، \text{س}_1)$ ، $(\text{ص}_2 ، \text{ص}_1)$ تطابق إشارة كل من $(\text{س}_4 ، \text{س}_3)$ ، $(\text{ص}_4 ، \text{ص}_3)$ (إشارتا البسطين والمقامين معاً متطابقتان)

القطعتان في اتجاهين متضادين إذا كانت إشارة كل من $(\text{س}_2 ، \text{س}_1)$ ، $(\text{ص}_2 ، \text{ص}_1)$ تختلف عن إشارة كل من $(\text{س}_4 ، \text{س}_3)$ ، $(\text{ص}_4 ، \text{ص}_3)$ (إشارتا البسطين والمقامين معاً مختلفتان)

ملاحظات هامة :

(١) إذا كان (جـ ، ء) = ك (أ ، ب) حيث ك ∋ ح فإن ، $\boxed{(\text{جـ} ، \text{ء}) \,//\, (\text{أ} ، \text{ب})}$

وإذا كان ك > ٠ فإن (أ ، ب) ، (جـ ، ء) لهما الاتجاه نفسه

وإذا كان ك < ٠ فإن (أ ، ب) ، (جـ ، ء) لهما اتجاهين متضادين

جمع قطعتين مستقيمتين موجهتين :

إذا كانت (أ ، ب) ، (ب ، جـ) قطعتين مستقيمتين موجهتين حيث نهاية القطعة الأولى هي بداية القطعة الثانية فإن ،

$\boxed{(\text{أ} ، \text{ب}) + (\text{ب} ، \text{جـ}) = (\text{أ} ، \text{جـ})}$

المتجهات في المستوى :

نقول عن قطعتين مستقيمتين موجهتين (أ ، ب) ، (جـ ، ء) إنهما تمثلان المتجهه نفسه إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه . وفي هذه الحالة نرمز للمتجه أ ب بالرمز $\overleftarrow{\text{أب}}$ وللمتجه جـ ء بالرمز $\overleftarrow{\text{جـء}}$ ويكون ،

$\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـء}}$ وتُعرّف طول المتجه أ ب بـ $|\overleftarrow{\text{أب}}| = |\text{أب}|$

تساوي متجهين :

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء نقاطاً في المستوى الإحداثي عندئذ ، $\boxed{\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـء}}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{ب} - \text{أ} = \text{ء} - \text{جـ}}$

متجه الموضع والصورة القياسية للمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$:

يسمى المتجه متجه موضع إذا كانت بدايته هي نقطة الأصل م (٠ ، ٠) .

لذا يمكن إيجاد متجه موضع مكافئ لأي متجه $\overleftarrow{\text{أب}}$

فمثلاً ،

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}} = \text{ب} - \text{أ} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، س ، ص مركبتا المتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$

فإنه يمكن إيجاد نقطة ء في المستوى الإحداثي بحيث ، $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{مء}}$

ويسمى $\overleftarrow{\text{مء}}$ متجه موضع للمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ وتسمى الصورة $\overleftarrow{\text{مء}}$ بالصورة القياسية للمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$

جمع المتجهات وضربها بعدد حقيقي :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{ص}_1 \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}} = \begin{bmatrix} \text{س}_2 \\ \text{ص}_2 \end{bmatrix}$ فإن ،

(١) $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{جـء}} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{ص}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{س}_2 \\ \text{ص}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 + \text{س}_2 \\ \text{ص}_1 + \text{ص}_2 \end{bmatrix}$

(٢) $\text{ك} \cdot \overleftarrow{\text{أب}} = \text{ك} \cdot \begin{bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{ص}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ك س}_1 \\ \text{ك ص}_1 \end{bmatrix}$

نظرية : النظام ($\text{ك}_\text{م}$ ، +) زمرة إبدالية حيث $\text{ك}_\text{م}$ هي مجموعة جميع المتجهات في المستوى الإحداثي

ملاحظات :

(١) العنصر المحايد في الزمرة ($\text{ك}_\text{م}$ ، +) هو $\overleftarrow{\text{م}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(٢) النظير الجمعي لأي متجه $\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ هو $\overleftarrow{\text{بأ}} = \begin{bmatrix} -\text{س} \\ -\text{ص} \end{bmatrix}$

عملية طرح المتجهات :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}} = \begin{bmatrix} \text{س}_1 \\ \text{ص}_1 \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{جـء}} = \begin{bmatrix} \text{س}_2 \\ \text{ص}_2 \end{bmatrix}$ فإن ،

$$\overleftarrow{\text{جـء}} - \overleftarrow{\text{أب}} = \begin{bmatrix} \text{س}_2 - \text{س}_1 \\ \text{ص}_2 - \text{ص}_1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات هامة :

(١) $\overleftarrow{\text{جـ د}} - \overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{جـ د}} + \overleftarrow{\text{ب أ}}$

(٢) إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ فإن، $\overleftarrow{\text{ب أ}} = \begin{bmatrix} -\text{س} \\ -\text{ص} \end{bmatrix}$، ميل $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

توازي وتعامد المتجهات :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ متجهين غير صفريين بحيث ،

$\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١} \\ \text{ص}_{١} \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}} = \begin{bmatrix} \text{س}_{٢} \\ \text{ص}_{٢} \end{bmatrix}$ فإن :

(١) $\overleftarrow{\text{أ ب}} \parallel \overleftarrow{\text{جـ د}} \Leftrightarrow \overleftarrow{\text{أ ب}} = \text{ك} \cdot \overleftarrow{\text{جـ د}} \Leftrightarrow \frac{\text{س}_{١}}{\text{س}_{٢}} = \frac{\text{ص}_{١}}{\text{ص}_{٢}} = \text{ك}$

حيث ك =
- عدد أكبر من الصفر ⟸ المتجهان لهما نفس الاتجاه
- عدد أصغر من الصفر ⟸ المتجهان متضادان في الاتجاه

(٢) $\overleftarrow{\text{أ ب}} \perp \overleftarrow{\text{جـ د}} \Leftrightarrow \text{م}_{\text{أب}} \times \text{م}_{\text{جـد}} = -١ \Leftrightarrow \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}} \times \frac{\text{ص}_{٢}}{\text{س}_{٢}} = -١$

ملاحظة :

يمكن إثبات التوازي في المثال السابق عن طريق إيجاد ميل كل متجه فنجد أن ، $\text{م}_{\text{أب}} = \text{م}_{\text{جـد}}$

متجهات الوحدة والضرب الداخلي لمتجهين :

متجهات الوحدة :

نسمي المتجهة $\overleftarrow{\text{س}}$ متجه الوحدة على محور السينات كما نسمي المتجه $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجه الوحدة على محور الصادات حيث ، $\overleftarrow{\text{س}} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٠ \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}} = \begin{bmatrix} ٠ \\ ١ \end{bmatrix}$

كتابة المتجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسية : (الصورة التحليلية للمتجه)

ليكن $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ متجهاً اختيارياً في المستوى الإحداثي عندئذ ،

$\overleftarrow{\text{أ ب}} = \text{س} \cdot \overleftarrow{\text{س}} + \text{ص} \cdot \overleftarrow{\text{ص}}$ وتسمى هذه الصورة التحليلية للمتجه

الضرب الداخلي لمتجهين :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ متجهين غير صفريين ، هـ قياس الزاوية بينهما فإننا نعرف الضرب الداخلي لهما بأنه ،

$\overleftarrow{\text{أ ب}} \bullet \overleftarrow{\text{جـ د}} = |\overleftarrow{\text{أ ب}}| \cdot |\overleftarrow{\text{جـ د}}| \text{ جتا هـ}$ وبالتالي فإن الضرب الداخلي لمتجهين عدد حقيقي .

ملاحظة :

إذا كان $\overleftarrow{أب} = \begin{bmatrix} س_1 \\ ص_1 \end{bmatrix}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \begin{bmatrix} س_2 \\ ص_2 \end{bmatrix}$ فإن ،

$\overleftarrow{أب}$ متعامد مع $\overleftarrow{جـ د}$ $\Leftrightarrow$ $س_1 \, س_2 + ص_1 \, ص_2 =$ صفر

القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مسار نقطة متحركة في المستوى بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم ثابت . النقطة الثابتة تسمى البؤرة والمستقم الثابت يسمى الدليل

ملاحظات هامة :

(١) الراس تقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل . (٢) المسافة بين البؤرة والدليل = ٢ أ

حالات القطع المكافئ :

أولاً : القطع المكافئ الذي راسه (٠ ، ٠) ومحور التناظر ينطبق على محور السينات (س) :

المعادلة القياسية	$ص^2 = ٤ أ س$	$ص^2 = - ٤ أ س$
إحداثيات البؤرة	(أ ، ٠)	(- أ ، ٠)
الدليل	يوازي محور الصادات	
معادلة الدليل	س = - أ	س = أ
محور التناظر	ينطبق على محور السينات ومعادلته ص = ٠	
اتجاه الفتحة	مفتوح يميناً جهة ($س^+$)	مفتوح يساراً جهة ($س^-$)

ثانياً : القطع المكافئ الذي راسه (٠ ، ٠) ومحور التناظر ينطبق على محور الصادات (ص)

المعادلة القياسية	$س^2 = ٤ أ ص$	$س^2 = - ٤ أ ص$
إحداثيات البؤرة	(٠ ، أ)	(٠ ، - أ)
الدليل	يوازي محور السينات	
معادلة الدليل	ص = - أ	ص = أ
محور التناظر	ينطبق على محور الصادات ومعادلته س = ٠	
اتجاه الفتحة	مفتوح لأعلى جهة ($ص^+$)	مفتوح لأسفل جهة ($ص^-$)

الصورة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ) :

أولاً : معادلة وصفات القطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ) ومحور التناظر يوازي محور السينات :

المعادلة القياسية	$(ص - هـ)^2 = 4أ(س - د)$	$(ص - هـ)^2 = -4أ(س - د)$
إحداثيات البؤرة	(د + أ ، هـ)	(د - أ ، هـ)
الدليل	يـــــوازي محـــــور الصـــــادات	
معادلة الدليل	س = د - أ	س = د + أ
محور التناظر	يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ	
الرأس	(د ، هـ)	(د ، هـ)
اتجاه الفتحة	مفتوح يميناً (جهة س+)	مفتوح يساراً (جهة س-)

ثانياً : معادلة وصفات القطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ) ومحور التناظر يوازي محور الصادات :

المعادلة القياسية	$(س - د)^2 = 4أ(ص - هـ)$	$(س - د)^2 = -4أ(ص - هـ)$
إحداثيات البؤرة	(د ، هـ + أ)	(د ، هـ - أ)
الدليل	يـــــوازي محـــــور الســــينات	
معادلة الدليل	ص = هـ - أ	ص = هـ + أ
محور التناظر	يوازي محور الصادات ومعادلته س = د	
الرأس	(د ، هـ)	(د ، هـ)
اتجاه الفتحة	مفتوح لأعلى (جهة ص+)	مفتوح لأسفل (جهة ص-)

نتيجة :

(أ) عندما يكون المحور موازياً محور ص تكون المعادلة : $\boxed{ص = م س^2 + هـ س + و}$ حيث م ≠ ٠

فإذا كانت م موجبة يكون القطع مفتوح لأعلى

فإذا كانت م سالبة يكون القطع مفتوح لأسفل

(ب) عندما يكون المحور موازياً محور س تكون المعادلة : $\boxed{س = م ص^2 + هـ ص + و}$ حيث م ≠ ٠

فإذا كانت م موجبة يكون القطع مفتوح يميناً

فإذا كانت م سالبة يكون القطع مفتوح يساراً

القطع الناقص :

هو مسار نقطة تتحرك في المستوى بحيث يظل مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين مقداراً ثابتاً .

* النقطتان الثابتتان تسميان البؤرتان * والمقدار الثابت = ٢ أ

ملاحظات هامة : (١) المسافة بين البؤرتين تسمى " البعد البؤري "

(٢) المستقيم الذي يمر بالبؤرتين يسمى " المحور البؤري " أو "المحور الأكبر"

(٣) النقطة التي في منتصف المسافة بين البؤرتين تسمى " مركز القطع"

(٤) المستقيم المار بالمركز وعمودياً عليه يسمى " المحور الأصغر " أو "المحور اللابؤري"

(٥) طول المحور الأكبر "البؤري" = ٢ أ ، طول المحور الأصغر = ٢ ب ، البعد البؤري = ٢ جـ

(٦) في القطع الناقص دائماً أ > ب ، أ > جـ

(٧) العلاقة بين أ ، ب ، جـ هي :

$$\boxed{\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{جـ}^2}$$

$$\boxed{\text{جـ}^2 = \text{أ}^2 - \text{ب}^2} \qquad \boxed{\text{ب}^2 = \text{أ}^2 - \text{جـ}^2}$$

حالات القطع الناقص :

أولاً : مركز القطع الناقص (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر ينطبق على أحد المحورين :

قطع ناقص محوره الأكبر ينطبق على سَ	قطع ناقص محوره الأكبر ينطبق على صَ
المعادلة القياسية: $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) البؤرتين (± جـ ، ٠) (٣) نهايتي المحور الأكبر (± أ ، ٠) (٤) نهايتي المحور الأصغر (٠ ، ± ب) (٥) المحور الأكبر هو سَ ومعادلته ص = ٠ (٦) المحور الأصغر هو صَ ومعادلته س = ٠	المعادلة القياسية: $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) البؤرتين (٠ ، ± جـ) (٣) نهايتي المحور الأكبر (٠ ، ± أ) (٤) نهايتي المحور الأصغر (± ب ، ٠) (٥) المحور الأكبر هو صَ ومعادلته س = ٠ (٦) المحور الأصغر هو سَ ومعادلته ص = ٠

ثانياً : مركز القطع (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي احد محوري الإحداثيات :

قطع ناقص راسه (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي سَ	قطع ناقص راسه (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي صَ
المعادلة القياسية : $\frac{(\text{س} - \text{د})^{2}}{\text{أ}^{2}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ الصفات : (١) المركز (د ، هـ) (٢) البؤرتين (د ± جـ ، هـ) (٣) نهايتي المحور الأكبر (د ± أ ، هـ) (٤) نهايتي المحور الأصغر (د ، هـ ± ب) (٥) المحور الأكبر // سَ ومعادلته هي : $\boxed{\text{ص} = \text{هـ}}$ وطوله ٢ أ (٦) المحور الأصغر // صَ ومعادلته هي : $\boxed{\text{س} = \text{د}}$ وطوله ٢ ب	المعادلة القياسية : $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{2}}{\text{أ}^{2}} + \frac{(\text{س} - \text{د})^{2}}{\text{ب}^{2}} = 1$ الصفات : (١) المركز (د ، هـ) (٢) البؤرتين (د ، هـ ± جـ) (٣) نهايتي المحور الأكبر (د ، هـ ± أ) (٤) نهايتي المحور الأصغر (د ± ب ، هـ) (٥) المحور الأكبر // صَ ومعادلته هي : $\boxed{\text{س} = \text{د}}$ وطوله ٢ أ (٦) المحور الأصغر // سَ ومعادلته هي : $\boxed{\text{ص} = \text{هـ}}$ وطوله ٢ ب

القطع الزائد :

هو مسار نقطة تتحرك في المستوى بحيث يبقى الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين في المستوى مقداراً ثابتاً .

* النقطتان الثابتتان تسميان البؤرتان   * والمقدار الثابت = ٢ أ

ملاحظات هامة :

(١) يتقاطع الخطين المقاربين (التقاربين) في مركز القطع الزائد .

(٢) المستقيم المار بالمركز وعمودياً على المحور القاطع يسمى المحور الغير قاطع .

(٣) طول المحور القاطع (المسافة بين راسي القطع) = ٢ أ   البعد البؤري (المسافة بين بؤرتي القطع) = ٢ جـ

البعد البؤري = ٢ جـ   (٨) في القطع الزائد يكون : جـ > أ ، جـ > ب

(٩) العلاقة بين أ ، ب ، جـ هي :

$$\boxed{\text{جـ}^{2} = \text{أ}^{2} + \text{ب}^{2}}$$

$$\boxed{\text{أ}^{2} = \text{جـ}^{2} - \text{ب}^{2}} \qquad \boxed{\text{ب}^{2} = \text{جـ}^{2} - \text{أ}^{2}}$$

حالات القطع الزائد :

أولاً : مركز القطع الزائد (٠ ، ٠) ومحوره القاطع ينطبق على أحد المحورين :

قطع زائد محوره القاطع ينطبق على سَ	قطع زائد محوره القاطع ينطبق على صَ
المعادلة القياسية: $\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) المحور القاطع ينطبق على سَ ومعادلته ص = ٠ وطوله = ٢ أ (٣) المحور الغير قاطع ينطبق على صَ ومعادلته س = ٠ (٤) البؤرتان (± جـ ، ٠) (٥) الراسان (± أ ، ٠) (٦) معادلتا خطي التقارب : $\boxed{\text{ص} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \text{س}}$	المعادلة القياسية: $\frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (٠ ، ٠) (٢) المحور القاطع ينطبق على صَ ومعادلته س = ٠ وطوله = ٢ أ (٣) المحور الغير قاطع ينطبق على سَ ومعادلته ص = ٠ (٤) البؤرتان (٠ ، ± جـ) (٥) الراسان (٠ ، ± أ) (٦) معادلتا خطي التقارب : $\boxed{\text{ص} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{س}}$

ثانياً : مركز القطع (ء ، هـ) ومحوره القاطع يوازي أحد محوري الإحداثيات :

قطع زائد مركزه (ء ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور السينات	قطع زائد مركزه (ء ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور الصادات
المعادلة القياسية: $\frac{(\text{س} - \text{ء})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (ء ، هـ) (٢) المحور القاطع // سَ ومعادلته ص = هـ (٣) المحور الغير القاطع // صَ ومعادلته س = ء (٤) البؤرتان (ء ± جـ ، هـ) (٥) الراسان (ء ± أ ، هـ) (٦) معادلتا الخطين التقاربيين هي : $\boxed{\text{ص} - \text{هـ} = \pm \frac{\text{ب}}{\text{أ}} (\text{س} - \text{ء})}$	المعادلة القياسية: $\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{أ}^2} - \frac{(\text{س} - \text{ء})^2}{\text{ب}^2} = 1$ الصفات : (١) المركز (ء ، هـ) (٢) المحور القاطع // صَ ومعادلته س = ء (٣) المحور الغير القاطع // سَ ومعادلته ص = هـ (٤) البؤرتان (ء ، هـ ± جـ) (٥) الراسان (ء ، هـ ± أ) (٦) معادلتا الخطين التقاربيين هي : $\boxed{\text{ص} - \text{هـ} = \pm \frac{\text{أ}}{\text{ب}} (\text{س} - \text{ء})}$

ملاحظة هامة : إذا عُلم خطي التقارب في القطع الزائد نحل المعادلتين معاً ونوجد نقطة تقاطعهما وهي تمثل مركز القطع الزائد .

القطوع المخروطية ومعادلة الدرجة الثانية :

أولاً : تمييز القطوع من المعادلة العامة من الدرجة الثانية :

في المعادلة : أ س^2 + ب ص^2 + جـ س + ء ص + هـ = ٠

حيث أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ $\in$ ح ، أ ، ب لا يساويان الصفر معاً

(١) المعادلة تمثل قطعاً مكافئاً : إذا كان أ × ب = صفر (أحد العاملين أ أو ب مساوياً للصفر)

(٢) المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً : إذا كان أ × ب > صفر (موجب) بمعنى أ ، ب لهما نفس الإشارة

(٣) المعادلة تمثل قطعاً زائداً : إذا كان أ × ب < صفر (سالب) بمعنى أ ، ب لهما إشارتين مختلفتين

(٤) المعادلة تمثل دائرة : إذا كان أ = ب

أولاً : المنشــور

المنشور القائم :

(١) المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع .

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة .

(٣) حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع .

المنشور المائل :

(١) المساحة الجانبية = محيط المقطع القائم × طول الحرف الجانبي .

= محيط القاعدة × طول الحرف الجانبي × جاهـ

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة .

مساحة المقطع القائم = مساحة القاعدة × جاهـ

(٣) حجم المنشور = مساحة المقطع القائم × طول الحرف الجانبي .

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع .

مساحة المقطع القائم = مساحة القاعدة × جاهـ

ثانياً : الهــرم

الهرم الثلاثي المنتظم (رباعي الوجوه المنتظم) :

(١) الأحرف جميعها متطابقة

(٢) الأوجه مثلثات متطابقة الأضلاع

(٣) ارتفاعه = $\sqrt{\frac{٢}{٣}}\ \text{ل}$

(٤) ارتفاع الوجه الجانبي = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}\ \text{ل}$

(٥) مساحته الجانبية = $٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤}\ \text{ل}^{٢}$

(٦) مساحته الكلية = $\sqrt{٣}\ \text{ل}^{٢}$

(٧) حجمه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}\ \text{ل}^{٣}$ (حيث ل هو طول ضلع القاعدة "طول الحرف الجانبي")

المساحة الجانبية والكلية وحجم الهرم :

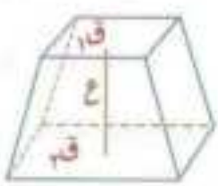
أولاً : الهرم القائم :

(١) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × ارتفاع الوجه الجانبي

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

(٣) الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

ثانياً : الهرم القائم الناقص المتوازي القاعدتين :



(١) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ مجموع محيطي القاعدتين × الارتفاع الجانبي .

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

(٣) الحجم = $\frac{١}{٣}\ \text{ع} \times [\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} + \sqrt{\text{ق}_{١}\,\text{ق}_{٢}}\ ]$

نظرية هامة :

في اي هــرم يكون ، إذا قطع الهرم بمستوى يوازي القاعدة و يبعد عن الرأس مسافة ك ، ارتفاعه ع ، مساحة المقطع ق١ ، مساحة القاعدة ق٢ فإن :

$$\frac{\text{ق}_{١}}{\text{ق}_{٢}} = \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \Rightarrow \text{ق}_{١} = \frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ع}^{٢}} \times \text{ق}_{٢}$$

ثالثاً : الأسطوانة :

قوانين الأسطوانة الدائرية القائمة : نصف قطر القاعدة (ر) ، الارتفاع (ع)

(١) المساحة الجانبية = ٢ ط ر ع

(٢) المساحة الكلية = ٢ ط ر ع + ٢ ط $\text{ر}^{٢}$

(٣) حجم الأسطوانة = ط $\text{ر}^{٢}$ ع

رابعاً : المخروط :

قوانين المخروط الدائري القائم : نصف قطر القاعدة (ر) ، الارتفاع (ع) ، ل طول الراسم

(١) المساحة الجانبية = ط ر ل .　　(٢) المساحة الكلية = ط ر ل + ط ر^{2}

(٣) حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط ر^{2} ع

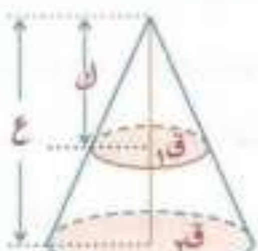
قوانين المخروط الدائري القائم الناقص :

(١) المساحة الجانبية = ط ($\text{ر}_1 + \text{ر}_2$) × ل

(٢) المساحة الكلية = ط ($\text{ر}_1 + \text{ر}_2$) ل + ط ($\text{ر}_1^2 + \text{ر}_2^2$)

(٣) حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط ع ($\text{ر}_1^2 + \text{ر}_2^2 + \text{ر}_1 \, \text{ر}_2$)

نظـرية هامـة :



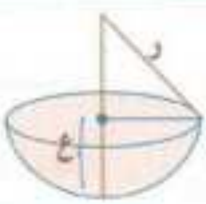
إذا قطع المخروط بمستوى يوازي القاعدة ويبعد عن رأس المخروط مسافة ك

فإن : مساحة المقطع = $\frac{\text{ك}^2}{\text{ع}^2}$ × مساحة القاعدة

$\Leftarrow \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2} = \frac{\text{ك}}{\text{ع}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{ق}_1}{\text{ق}_2} = \frac{\text{ك}^2}{\text{ع}^2}$

خامساً : الكرة

قوانين القبة الكروية :



(١) المساحة السطحية للقبة الكروية = ٢ ط ر ع

(٢) حجم القبة الكروية = $\frac{\text{ط}}{3}$ ع^2 [٣ ر - ع]

قوانين الكرة :

(١) المساحة السطحية للكرة = ٤ ط ر^2　　(٢) حجم الكرة = $\frac{4}{3}$ ط ر^3

التفاضل والتكامل

التفسير الهندسي لمتوسط التغير :

متوسط التغير هو ميل المستقيم ل الذي يمر بالنقطتين ($س_١$ ، د ($س_١$)) ، ($س_١$ + هـ ، د ($س_١$ + هـ))

وهو ايضاً ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب لمحور السينات:

$$م = \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ} = ظا ى$$

مشتقة الدالة : إذا كانت د (س) معرفة على] أ ، ب [وكانت $س_١$ ∈] أ ، ب [فإذا كانت

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$ موجودة فإنها تسمى مشتقة الدالة عند $س_١$ (معدل التغير)

وعندئذ يقال ان الدالة د (س) قابلة للاشتقاق عن $س_١$

*** رموز المشتقة :**

يرمز لمشتقة الدالة ص = د (س) باحد الرموز $دَ(س)$ او $\frac{ءص}{ءس}$ او $\frac{ء}{ءس}$ (د(س)) او صَ

*** التفسير الهندسي للمشتقة عند نقطة :** مشتقة الدالة عند نقطة ما تساوي ميل المماس للدالة عند تلك النقطة كذلك دَ(س) = ظاهـ حيث هـ هي الزاوية التي يصنعها المماس عند النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

لاحظ أن : مجال دَ(س) ⊇ مجال د(س)

العلاقة بين اتصال الدالة عند نقطة وقابلية الاشتقاق عند هذه النقطة :

(١) إذا كانت الدالة متصلة عند $س_١$ فليس من الضروري أن تكون قابلة للاشتقاق عند $س_١$

(فمثلاً ، د(س) = | س | متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠)

(٢) إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $س_١$ فلا بد أن تكون متصلة عند $س_١$

(٣) إذا كانت الدالة غير متصلة عند $س_١$ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند $س_١$

(٤) الدالة د(س) = | س | متصلة لكل س ∈ ح ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند س = ٠

قواعد الاشتقاق :

(١) إذا كانت د(س) = جـ فإن دَ(س) = صفر (مشتقة الدالة الثابته هي الدالة الصفرية)

(٢) إذا كانت د(س) = $س^ن$ فإن ، دَ(س) = ن $س^{ن-١}$ لكل س ∈ ح

(٣) ليكن جـ عدداً ثابتاً ، فإن $\frac{ء}{ءس}$ (جـ . د(س)) = جـ . $\frac{ء}{ءس}$ (د(س))

بمعنى ، مشتقة (ثابت × دالة) = الثابت × مشتقة الدالة

(٤) $\frac{ء}{ءس}$ (د(س) + ر(س)) = $\frac{ء}{ءس}$ (د(س)) + $\frac{ء}{ءس}$ (ر(س))

(٥) $\frac{ء}{ءس}$ [د(س) . ر(س)] = د(س) . $\frac{ء}{ءس}$ (ر(س)) + ر(س) . $\frac{ء}{ءس}$ (د(س))

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

(٦) إذا كانت د(س) $= \frac{١}{ر(س)}$ حيث ر(س) ≠ ٠ ، ر̀(س) لها وجود فإن د̀(س) لها وجود ويكون ، د̀(س) $= \frac{-ر̀(س)}{[ر(س)]^٢}$

ملحوظة : إذا كانت د(س) $= \frac{أ}{ر(س)}$ حيث أ ثابت فإن ، د̀(س) $= -\frac{أ \times ر̀(س)}{[ر(س)]^٢}$

مشتقة $\frac{\text{ثابت}}{\text{دالة}} = -\frac{\text{الثابت} \times \text{مشتقة الدالة}}{\text{مربع الدالة}}$

(٧) $\frac{ء}{ءس}\left[\frac{د(س)}{ر(س)}\right] = \frac{ر(س) . د̀(س) - د(س) . ر̀(س)}{[ر(س)]^٢}$ حيث ر(س) ≠ ٠

مشتقة قسمة دالتين $= \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$

نتائج هامة :

(١) $\frac{ء}{ءس}$ [د(س)]^{ن} = ن (د(س))$^{ن-١}$ × د̀(س)

أي أن ، مشتقة (دالة)^{ن} = ن (دالة)$^{ن-١}$ × مشتقة ما داخل القوس

(٢) مشتقة الجذر التربيعي ، $\frac{ء}{ءس}$ ($\sqrt{د(س)}$) $= \frac{د̀(س)}{٢\sqrt{د(س)}}$

مشتقة الجذر التربيعي $= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{الجذر}}$

ملحوظة : أي دالة كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على ح

قواعد اشتقاق الدالة اللوغاريتمية:

(١) إذا كانت ص = لو س فإن ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س}$ ، س > ٠

(٢) إذا كانت ص = لو د(س) فإن ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د̀(س)}{د(س)}$ $\frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة نفسها}}$

(٣) إذا كانت ص = لو$_{أ}$ س فإن ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{س \text{ لو } أ}$

(٤) إذا كانت ص = لو$_{أ}$ د(س) فإن ، $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د̀(س)}{د(س) . \text{لو } أ}$ $\frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة نفسها} \times \text{لو } أ}$

ملحوظة هامة جدًا :

(١) $e^{\text{لو د(س)}}$ = د(س) (٢) لو $e^{د(س)}$ = د(س)

قواعد اشتقاق الدالة الأسية :

أولاً : إذا كان الأساس $= e$

(١) إذا كانت ص $= e^{\text{س}}$ فإن ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = e^{\text{س}}$

(٢) إذا كانت ص $= e^{\text{د(س)}}$ فإن ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = e^{\text{د(س)}} \times \text{دَ(س)}$

ثانياً : إذا كان الأساس $=$ أ حيث أ $\in$ ح$^{+}$

(١) إذا كانت ص $=$ أ$^{\text{س}}$ فإن ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ أ$^{\text{س}}$. لو أ

(٢) إذا كانت ص $=$ أ$^{\text{د(س)}}$ فإن ، $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$ أ$^{\text{د(س)}}$ $\times$ دَ(س) لو أ

تطبيقات على المشتقة :

أولاً : التطبيقات الهندسية :

تذكر أن :

(١) دَ(س) = ميل المماس عند س

(٢) دَ(س) = ظا هـ حيث هـ الزاوية التي يصنعها المماس مع س$^{+}$

(٣) إذا كان المماس للمنحنى عند نقطة ما يوازي محور س (أفقياً) فإن دَ(س) عند هذه النقطة = ٠

(٤) إذا كان المماس للمنحنى عند نقطة ما يوازي محور ص (رأسياً) فإن دَ(س) عند هذه النقطة = ∞ (غير معروفة)

(٥) يتوازى المستقيمان إذا كان ، ميل الأول = ميل الثاني

(٦) يتعامد المستقيمان إذا كان ، ميل الأول = $\frac{-1}{\text{ميل الثاني}}$

* **معادلة المماس والعمودي :** إذا كانت النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) تقع على منحنى الدالة د(س) فإن ،

(١) معادلة المماس عند (س$_1$ ، ص$_1$) هي ، ص $-$ ص$_1$ $=$ م (س $-$ س$_1$)

(٢) معادلة العمودي عند (س$_1$ ، ص$_1$) هي ، ص $-$ ص$_1$ $= \frac{-1}{\text{م}}$ (س $-$ س$_1$)

(حيث م هي ميل المماس ، م = دَ(س$_1$))

ملحوظة :

(١) إذا كان المماس عند (س$_1$ ، ص$_1$) يوازي محور السينات فإن ،

معادلة المماس هي ص = ص$_1$ ، معادلة العمودي هي س = س$_1$

(٢) إذا كان المماس عند (س$_1$ ، ص$_1$) يوازي محور الصادات فإن ،

معادلة المماس هي س = س$_1$ ، معادلة العمودي ص = ص$_1$

(٣) ميل المماس عند اي نقطة = $\frac{-1}{\text{ميل العمودي عند هذه النقطة}}$

(٤) لا يوجد مماس ولا عمودي عند نقاط الانكسار او الانفصال في الدالة لعدم وجود مشتقة الدالة عندها

ثانياً : التطبيقات الفيزيائية

إذا تحرك جسيم على خط مستقيم فقطع مسافة ف بعد زمن مقداره ن فإن ،

المسافة ف ← اشتقاق ← السرعة ع ← اشتقاق ← التسارع ت

أي أن ، السرعة $\text{ع} = \frac{\text{ء ف}}{\text{ء ن}}$ التسارع $\text{ت} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$

ملاحظات هامة :

(١) ع(ن) السرعة عن أي لحظة .

(٢) ت (ن) التسارع عند أي لحظة .

(٣) السرعة الابتدائية عندما ن = صفر ، ع = ؟

(٤) لا يجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم نضع ع = صفر ⟸ ن (زمن الوصول لأقصى ارتفاع) ثم نعوض بالزمن في دالة المسافة (ف) .

(٥) يعود الجسيم لنقطة البداية (القذف) ف = ٠ ، ن ≠ ٠ .

(٦) لا يجاد التسارع عند انعدام السرعة ، نضع ع = ٠ ⟸ ن ثم نعوض بالزمن ن في التسارع .

قاعدة التسلسل : إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س) فإن ، $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ص}}{\text{ء ع}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$

مشتقات الدوال الدائرية :

الدالة	مشتقتها
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	قا^{2} س
قا س	قا س ظا س
ظتا س	− قتا^{2} س
قتا س	− قتا س ظتا س

ملحوظة هامة :

(١) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (دالة دائرية) = مشتقة الدلة الدائرية × مشتقة الزاوية

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ $(\text{دالة دائرية})^{\text{ن}}$ = ن $(\text{دالة دائرية})^{\text{ن} - 1}$ × مشتقة الدالة الدائرية × مشتقة الزاوية

إذا كانت ص = د(س) فإن :

مشتقة الأولى صَ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = دَ(س) * المشتقة الثانية صً ، $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ءس}^{2}}$ ، دً(س)

المشتقة الثالثة ص‴ ، $\frac{\text{ء}^{3}\text{ص}}{\text{ءس}^{3}}$ ، د‴(س) * المشتقة النونية ص$^{(\text{ن})}$ ، $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}}$ ، د$^{(\text{ن})}$(س)

النقطة الحرجة للدالة د :

إذا كانت د(س) متصلة على [أ ، ب] ، جـ ∋ (أ ، ب) فإن النقطة (جـ ، د(جـ)) تسمى نقطة حرجة إذا كان ، دَ(جـ) = صفر أو دَ(جـ) غير معرفة

نظرية رول :

إذا كانت الدالة د(س) :

(١) متصلة على الفترة [أ ، ب] (٢) قابلة للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)

(٣) د(أ) = د(ب) فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة جـ ∋ (أ ، ب) بحيث دَ(جـ) = صفر

ملاحظات هامة على النظرية :

(١) دالة القيمة المطلقة (المقياس) غير قابلة للاشتقاق عند أصفارها

(٢) إذا كانت د(س) = ثابت فإنها تحقق نظرية رول ويمكننا في هذه الحالة أن نأخذ جـ أي عدد ∋ (أ ، ب)

(٣) دالة الدرجة الأولى لا تحقق رول على أي فترة لأن د(أ) ≠ د(ب)

(٤) إذا كانت د(س) دالة تربيعية وتحقق رول على [أ ، ب] فتكون جـ = $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$

نظرية القيمة المتوسطة للتفاضل :

إذا كانت الدالة (س) :

(١) متصلة في الفترة [أ ، ب] (٢) قابلة للاشتقاق في (أ ، ب)

فإنه يوجد عدد واحد على الأقل جـ ∋ (أ ، ب) بحيث يكون :

دَ(جـ) = $\frac{\text{د(ب)} - \text{د(أ)}}{\text{ب} - \text{أ}}$

ملاحظات هامة :

(١) كل دالة تحقق نظرية رول فإنها تحقق القيمة المتوسطة للتفاضل

(٢) الدالة د(س) = أ س + ب تحقق القيمة المتوسطة في [أ ، ب] وتكون جـ هو أي عدد ∋ (أ ، ب)

(٣) الدالة التربيعية تحقق القيمة المتوسطة للتفاضل في [أ ، ب] وتكون جـ = $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$

اطراد الدوال :

إذا كانت الدالة د(س) متصلة في [أ ، ب] وقابلة للاشتقاق في (أ ، ب) فإن ،

(١) د(س) تزايدية في [أ ، ب] ⟸⟹ دَ(س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

(٢) د(س) تناقصية في [أ ، ب] ⟺ دَ(س) < ٠ لكل س ∈ (أ ، ب)

التقعر :

إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق مرتين عي الفترة (أ ، ب) إذا كانت ،

(١) دً(س) > ٠ لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د مقعرة لأعلى في (أ ، ب)

(٢) دً(س) < ٠ لكل س ∈ (أ ، ب) فإن د مقعرة لأسفل في (أ ، ب)

نقطة الانقلاب (الانعطاف) :

تسمى النقطة (جـ ، د(جـ)) نقطة انقلاب (انعطاف) إذا توافرت الشروط ،

(١) جـ ∈ مجال الدالة (٢) دً(جـ) = ٠ او دً(جـ) غير معرفة .

(٣) يتغير عندها تقعر المنحنى (قبلها وبعدها تقعرين مختلفين) .

ملحوظة :

* نقطة الانقلاب للدالة د هي نقطة حرجة للدالة دَ(س)
* نقطة الانقلاب للدالة د هي نقطة تقاطع منحنى دً(س) مع س~

تصنيف النقاط الحرجـة

اختبار المشتقة الأولى :

إذا كانت جـ نقطة حرجة للدالة د(س) ، الدالة د(س) متصلة عند جـ فإذا كان ،

(١) دَ(جـ⁻) < ٠ ، دَ(جـ⁺) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية

(٢) دَ(جـ⁺) < ٠ ، دَ(جـ⁻) > ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية

(٣) إذا كانت إشارة د(س) لا تختلف بالقرب من جـ فإنها ليست قيمة قصوى محلية

اختبار المشتقة الثانية :

إذا كانت (جـ ، د(جـ)) نقطة حرجة للدالة د(س)

(١) إذا كان دً(جـ) > ٠ فإن د يكون لها قيمة صغرى محلية عند جـ

(٢) إذا كان دً(جـ) < ٠ فإن د يكون لها قيمة عظمى محلية عند جـ

الدوال الأصلية :

إذا كانت د معرفة على الفترة ف حيث ف ⊂ ح فإن كل دالة ل تحقق العلاقة،

لَ(س) = د(س) لكل س ∈ ف تسمى دالة أصلية (معكوس المشتقة) للدالة د(س) على ف

ملاحظات :

(١) إذا كانت د\`(س) = ٠ لكل س ∋ [أ ، ب] فإن د تكون ثابتة في الفترة

(٢) إذا كانت د(س) معرفة على الفترة ف ، ل١ ، ل٢ دالتين اصليتين للدالة د فإنه يوجد ث ∋ ح بحيث

ل١ (س) - ل٢ (س) = ث

(٣) نستخدم الرمز ∫ د(س) ءس للدلالة على الدالة الأصلية للدالة د(س) ويقرأ تكامل لدالة د(س) بالنسبة لـ س اي ان: ∫ د(س) ء(س) = ل (س) + ث حيث ث يسمى ثابت التكامل

بعض خواص التكامل الغير محدد :

(١) ∫ د\`(س) ء(س) = د (س) + ث

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ ∫ د(س) ء(س) = د (س)

(٣) ∫ أد (س) ء(س) = أ ∫ د (س) ء(س) لكل أ ∋ ح

جدول لبعض التكاملات غير المحددة الأساسية :

(١) ∫ ءس = س + ث

(٢) ∫ أ ءس = أس + ث لكل أ ∋ ح

(٣) ∫ سن ءس = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + ث لكل ن ∋ ح - {-١}

(٤) ∫ (أس + ب)ن ءس = $\frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)}$ + ث لكل ن ∋ ح - {-١}

جدول تكاملات الدوال المثلثية الأساسية :

(١) ∫ جا س ءس = - جتا س + ث

(٢) ∫ جتا س ءس = جا س + ث

(٣) ∫ قا٢ س ءس = ظا س + ث

(٤) ∫ قا س ظا س ءس = قا س + ث

(٥) ∫ قتا٢ س ءس = - ظتا س + ث

(٦) ∫ قتا س ظتا س ءس = - قتا س + ث

ملاحظة:

إذا كانت الزاوية من الدرجة الأولى فإن النتيجة تكون ، $\frac{\text{تكامل النسبة المثلثية}}{\text{معامل س}}$

تكاملات تؤول إلى دوال لوغاريتمية :

(١) ∫ $\frac{1}{\text{س}}$ ءس = لو |س| + ث

(٢) ∫ $\frac{\text{د}\grave{}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}$ ءس = لو |د(س)| + ث

تكامل تؤول إلى دوال أسية :

تكاملات تؤول إلى دوال أسية أساسها ه :

(١) $\int \text{ه}^{\text{س}}\, \text{ءس} = \text{ه}^{\text{س}} + \text{ث}$ (٢) $\int \text{د}'(\text{س})\, \text{ه}^{\text{د(س)}}\, \text{ءس} = \text{ه}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{ه}^{(\text{ب س} + \text{جـ})}\, \text{ءس} = \frac{1}{\text{ب}}\, \text{ه}^{(\text{ب س} + \text{جـ})} + \text{ث}$

تكاملات تؤول إلى دوال أسية أساسها أ :

(١) $\int \text{أ}^{\text{س}}\, \text{ءس} = \frac{\text{أ}^{\text{س}}}{\text{لو}\, \text{أ}} + \text{ث}$ (٢) $\int \text{د}'(\text{س})\, \text{أ}^{\text{د(س)}}\, \text{ءس} = \frac{\text{أ}^{(\text{س})}}{\text{لو}\, \text{أ}} + \text{ث}$

(٣) $\int \text{أ}^{(\text{ب س} + \text{جـ})}\, \text{ءس} = \frac{\text{أ}^{(\text{ب س} + \text{جـ})}}{\text{ب لو}\, \text{أ}} + \text{ث}$

ملحوظة هامة : $\boxed{\text{ه}^{\text{لو د(س)}} = \text{د(س)}}$ $\boxed{\text{لو}\, \text{ه}^{\text{د(س)}} = \text{د(س)}}$

تطبيقات على التكامل الغير محدد :

أولاً : التطبيقات الهندسية

$\boxed{\text{ص}'' = \text{د}''(\text{س}) = \frac{\text{ء}^2\text{ص}}{\text{ءس}^2}} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \boxed{\text{ص}' = \text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \boxed{\text{ص} = \text{د(س)}}$

معدل تغير ميل المماس — معدل تغير د(س) — معادلة المنحنى

ميل منحنى د′(س) — ميل المماس

ثانياً : التطبيقات الفيزيائية

$\boxed{\text{ت (التسارع) العجلة}} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \boxed{\text{ع (السرعة)}} \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \boxed{\text{ف (المسافة) الإزاحة}}$

معدل تغير السرعة — معدل تغير المسافة

$\text{ع} = \int \text{ت}\, \text{ءن}$ $\text{ف} = \int \text{ع}\, \text{ءن}$

تكاملات على الصورة :

$$\int [\text{د(س)}]^{\text{ن}} \cdot \text{د}'(\text{س})\, \text{ءس} = \frac{[\text{د(س)}]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث} \quad ، \text{ن} \neq -1$$

التجزئ النوني المنتظم للفترة [أ ، ب]

وفيه تجزئ الفترة [أ ، ب] إلى فترات متساوية ويكون ، عدد الفترات = ن عدد النقاط = ن + ١

طول الفترة الجزئية ، $\Delta \text{س} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$

ويكون ، $\text{ت}_{\text{ن}}(\text{أ} ، \text{ب}) = (\text{أ} ، \text{أ} + \Delta \text{س} ، \text{أ} + 2\Delta \text{س} ، \ldots\ldots ، \text{ب})$

التكامل المحدد :

التكامل المحدد هو : $\lim_{\text{ن} \to \infty}$ (مجموع ريمان)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = \lim_{\text{ن} \to \infty} \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د(جـ}_{\text{ر}}\text{)} \,.\, \Delta \text{س}_{\text{ر}} \right)$$

إذا كانت الدالة د(س) متصلة على [أ ، ب] فإنها تكون قابلة للتكامل على هذه الفترة.

النظرية الأساسية لحساب التكامل :

إذا كانت الدالة د(س) متصلة في [أ ، ب] وكانت ق(س) دالة أصلية للدالة د فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = \Big[\text{ق(س)} \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

نتائج :

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك}\, \text{ءس} = \text{ك}\,(\text{ب} - \text{أ})$ حيث ك $\in$ ح

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}\, \text{ءس} = \dfrac{\text{ب}^2 - \text{أ}^2}{2}$

(٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^2\, \text{ءس} = \dfrac{\text{ب}^3 - \text{أ}^3}{3}$

بعض خواص التكامل المحدد :

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في [أ ، ب] فإن :

(١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = \text{صفر}$

(٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\, \text{ءس}$

(٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س)}\, \text{ءس} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس}$ (حيث ك ثابت)

(٤) إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في [أ ، ب] ، جـ $\in$ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\, \text{ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس}$$

(٥) إذا كانت كل من د_1 ، د_2 قابلة للتكامل على [أ ، ب] وكان $\text{د}_1\text{(س)} \le \text{د}_2\text{(س)}$ على [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_1\text{(س)}\, \text{ءس} \le \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}_2\text{(س)}\, \text{ءس}$$

نظرية القيمة المتوسطة للتكامل :

إذا كانت د دالة متصلة في [أ ، ب] فإنه يوجد نقطة $\text{س}_0 \in$ [أ ، ب] بحيث :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\, \text{ءس} = (\text{ب} - \text{أ})\, \text{د(س}_0\text{)}$$

النظرية الأساسية لحساب التكامل :

إذا كانت الدالة د(س) متصلة في [أ ، ب] وكانت ى دالة معرفة كما يلي :

ى(س) = $\int_{أ}^{س}$ د(ع) ءع لكل س ∋ [أ ، ب] فإن : $\frac{ء}{ءس}$ ى(س) = د(س)

مساحات بعض المناطق المستوية :

إذا كانت د(س) دالة معرفة ومحددة على [أ ، ب]

(١) إذا كانت د(س) غير سالبة في [أ ، ب] أي أن د(س) ≥ ٠ فإن : $\boxed{م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس}$

(٢) إذا كانت د(س) غير موجبة في [أ ، ب] أي أن د(س) ≤ ٠ فإن : $\boxed{م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس}$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين :

إذا كانت $د_١$(س) ، $د_٢$(س) دالتين متصلتين في [أ ، ب] فإذا كانت $د_٢$(س) ≥ $د_١$(س)

لكل س ∋ [أ ، ب] فإن : ∴ م = $\int_{أ}^{ب}$ [$د_٢$(س) - $د_١$(س)] ءس

حجوم الأجسام الدورانية :

أولاً : حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محدودة بمنحنى ومستقيمين دورة كاملة :

(١) إذا دارت منطقة مستوية محدودة بالمنحنى ص = د(س) والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم الجسم الدوراني المتولد هو : $\boxed{ح = ط \int_{أ}^{ب} ص^٢\, ءس}$ حيث أ < ب

(٢) إذا دارت منطقة مستوية محدودة بالمنحنى س = د(ص) والمستقيمين ص = جـ ، ص = د دورة كاملة حول محور الصادات فإن حجم الجسم الدوراني المتولد هو : $\boxed{ح = ط \int_{جـ}^{د} س^٢\, ءص}$ حيث جـ < د

ثانياً : حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محصورة بين منحنيين :

إذا دارت المنطقة المحدودة بالمنحنيين $ص_١$ ، $ص_٢$ حول محور السينات حيث $ص_١^٢ ≥ ص_٢^٢$

لكل س ∋ [أ ، ب] فإن $\boxed{ح = ط \int_{أ}^{ب} (ص_١^٢ - ص_٢^٢)\, ءس}$

حساب المثلثات

الزوايا وقياسها

الزاوية الموجهة : تتحدد الزاوية الموجهة بثلاثة عناصر هي :

(١) الضلع الابتدائي . (٢) الضلع النهائي . (٣) اتجاه الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي

و يكون :

(١) قياسها موجب عندما يكون الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس حركة عقربي الساعة

(٢) قياسها سالب عندما يكون الدوران من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع اتجاه حركة عقربي الساعة

العلاقة بين التقدير الستيني والتقدير الدائري للزوايا :

$$\boxed{\frac{\text{س}^\circ}{١٨٠} = \frac{\text{هـ}}{\text{ط}}}$$

حيث ط ≃ ٣,١٤

$$\text{هـ} = \text{س}^\circ \times \frac{\text{ط}}{١٨٠^\circ}$$

الزاوية بالتقدير الدائري

$$\text{س}^\circ = \text{هـ} \times \frac{١٨٠^\circ}{\text{ط}}$$

الزاوية بالتقدير الستيني

طول قوس في دائرة :

$$\boxed{\text{ل} = \text{هـ} \times \text{نق}}$$

$$\text{هـ} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}} \qquad \text{نق} = \frac{\text{ل}}{\text{هـ}}$$

ل = طول القوس في الدائرة
نق = نصف قطر الدائرة
هـ = الزاوية المركزية بالتقدير الدائري

دائرة الوحدة :

دائرة الوحدة : هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة الطول .

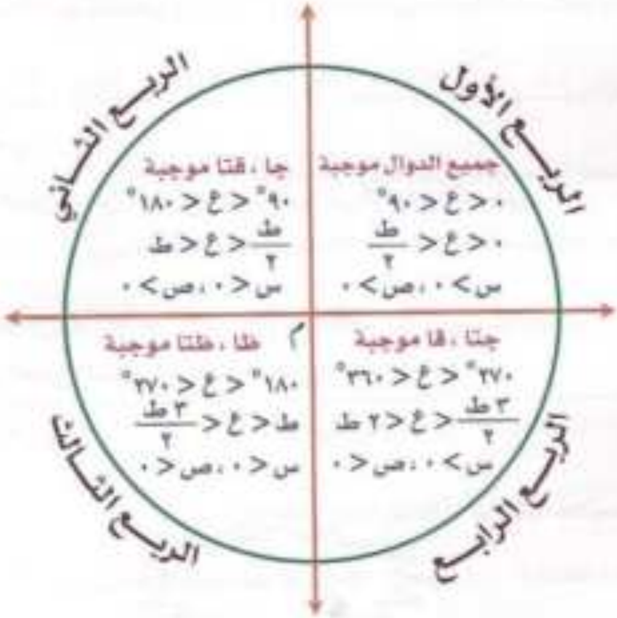
معادلة دائرة الوحدة هي : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ١$

ملاحظات هامة :

(١) لأي الزاوية ع فإن : $-١ \leqslant \text{جا ع} \leqslant ١$ ، $-١ \leqslant \text{جتا ع} \leqslant ١$

بمعنى ان : جا ع ، جتا ع $\in [-١ ، ١]$

قاعدة الإشارات :



متطابقات أولية :

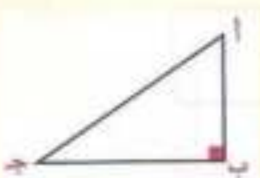
لأي زاوية هـ فإن :

(١) قا هـ = $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$ (٢) قتا هـ = $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

(٣) ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ (٤) ظتا هـ = $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

ملاحظات :

(١) إذا وُجد مثلث قائم معلوم به طولا ضلعين نوجد طول الضلع الثالث باستخدام نظرية فيثاغورث .



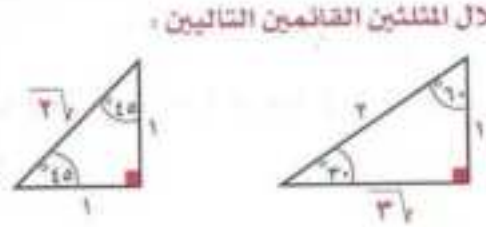
أ ب جـ مثلث قائم في $\hat{ب}$ فإن : (الوتر)^٢ = (ضلع$_١$)^٢ + (ضلع$_٢$)^٢

(٢) قيم الدوال المثلثية في المثلث القائم نطلق عليها (النسب المثلثية وذلك لأنها نسب أطوال أضلاع المثلث القائم

النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

الزاوية / الدالة	٠°	٣٠° = $\frac{ط}{٦}$	٤٥° = $\frac{ط}{٤}$	٦٠° = $\frac{ط}{٣}$	٩٠° = $\frac{ط}{٢}$	١٨٠° = ط	٢٧٠° = $\frac{٣ط}{٢}$	٣٦٠° = ٢ط
جا هـ	صفر	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	صفر	−١	صفر
جتا هـ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	−١	صفر	١
ظا هـ	صفر	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	صفر	غير معرّف	صفر

يمكن توضيح النسب المثلثية من خلال المثلثين القائمين التاليين :



بعض العلاقات المثلثية :

العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين :

يقال للزاويتين أنهما متتامتين إذا كان مجموعهما ٩٠° فالزاوية هـ متممتها (٩٠° - هـ)

جا (٩٠° - هـ) = جتا هـ	جتا (٩٠° - هـ) = جا هـ
ظا (٩٠° - هـ) = ظتا هـ	ظتا (٩٠° - هـ) = ظا هـ

تبسيط بعض قيم الدوال المثلثية :

أولاً : الدوال المثلثية لزاوية تقع في الربع الأول :

لأي زاوية موجهة قياسها ع :

جا $(\frac{ط}{٢} - ع)$ = جتا ع　　جتا $(\frac{ط}{٢} - ع)$ = جا ع　　ظا $(\frac{ط}{٢} - ع)$ = ظتا ع

ملاحظة :

إذا كان جا هـ = جتا ع أ، ظا هـ = ظتا ى أ، قا هـ = قتا هـ

فإن : هـ ، ع زاويتان متتامتان

بمعنى أن ، هـ + ع = ٩٠°

ثانياً : الدوال المثلثية لزاوية تقع في الربع الثاني :

على الصورة : (ط - ع)	على الصورة : $(\frac{ط}{٢} + ع)$
لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا (ط - ع) = جا ع　(٢) جتا (ط - ع) = - جتا ع (٣) ظا (ط - ع) = - ظا ع	لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = جتا ع　(٢) جتا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = - جا ع (٣) ظا $(\frac{ط}{٢} + ع)$ = - ظتا ع

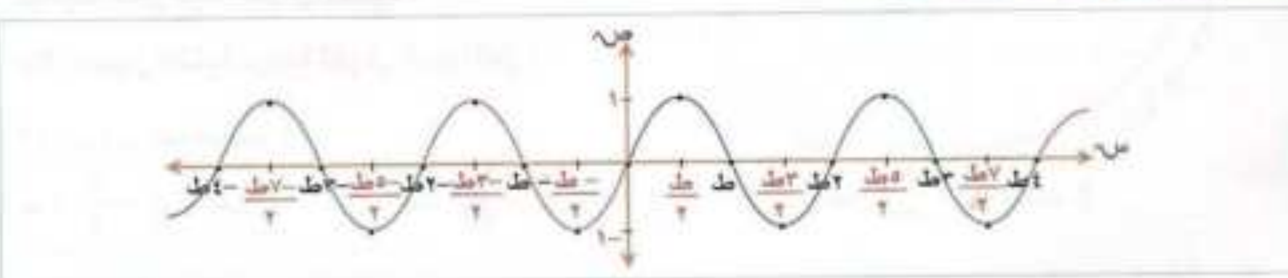
ثالثاً : الدوال المثلثية لزاوية تقع في الربع الثالث :

على الصورة : (ط + ع)	على الصورة : $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$
لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا (ط + ع) = - جا ع (٢) جتا (ط + ع) = - جتا ع (٣) ظا (ط + ع) = ظا ع	لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$ = - جتا ع (٢) جتا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$ = - جا ع (٣) ظا $(\frac{٣ط}{٢} - ع)$ = ظتا ع

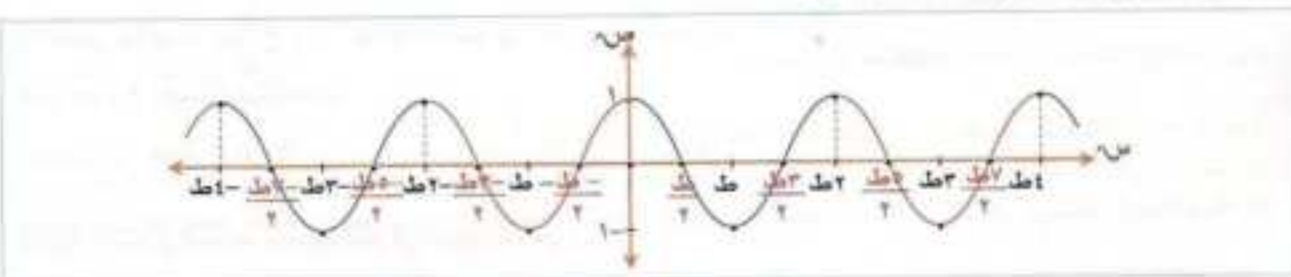
رابعاً : الدوال المثلثية لزاوية تقع في الربع الرابع :

على الصورة : (− ع)	على الصورة : (٢ ط − ع)
لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا (− ع) = − جا ع (٢) جتا (− ع) = جتا ع (٣) ظا (− ع) = − ظا ع	لأي زاوية موجهة قياسها ع فإن : (١) جا (٢ ط − ع) = − جا ع (٢) جتا (٢ ط − ع) = جتا ع (٣) ظا (٢ ط − ع) = − ظا ع

التمثيل البياني لدالة الجيب (جا س) :



التمثيل البياني لدالة جيب التمام (جتا س) :



المتطابقات الأساسية :

لأي زاوية هـ فإن : (١) جا^2 هـ + جتا^2 هـ = ١

(٢) ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ (٣) ١ + ظا^2 هـ = قا^2 هـ (٤) ١ + ظتا^2 هـ = قتا^2 هـ

ملاحظات هامة :

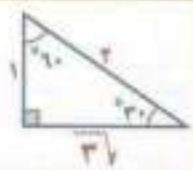
قاعدة الإشارات :

(٢) الدوال المثلثية في المثلث القائم الزاوية :

جا هـ $=\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	قتا هـ $=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$
جتا هـ $=\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	قا هـ $=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
ظا هـ $=\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$	ظتا هـ $=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

هـ	٠°	٣٠° $=\frac{ط}{٦}$	٤٥° $=\frac{ط}{٤}$	٦٠° $=\frac{ط}{٣}$	٩٠° $=\frac{ط}{٢}$	١٨٠° = ط	٢٧٠° $=\frac{٣ط}{٢}$	٣٦٠° = ٢ط
جا هـ	٠	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	١	٠	١−	٠
جتا هـ	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	٠	١−	٠	١
ظا هـ	٠	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$	غير معرّف	٠	غير معرّف	٠



(٣) لأي زاوية هـ : −١ ≤ جا هـ ≤ ١ ، −١ ≤ جتا هـ ≤ ١

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما :

أولاً- متطابقات مجموع زاويتين :

(١) جا (هـ + ى) = جا هـ جتا ى + جتا هـ جا ى

(٢) جتا (هـ + ى) = جتا هـ جتا ى − جا هـ جا ى

(٣) ظا (هـ + ى) $=\frac{\text{ظا هـ} + \text{ظا ى}}{١ - \text{ظا هـ ظا ى}}$

ثانياً- متطابقات الفرق بين زاويتين :

(١) جا (هـ − ى) = جا هـ جتا ى − جتا هـ جا ى

(٢) جتا (هـ − ى) = جتا هـ جتا ى + جا هـ جا ى

(٣) ظا (هـ − ى) $=\frac{\text{ظا هـ} - \text{ظا ى}}{١ + \text{ظا هـ ظا ى}}$

متطابقات ضعف الزاوية ونصف الزاوية :

أولاً- متطابقات ضعف الزاوية :

$\text{جا } ٢\text{هـ} = ٢ \text{ جاهـ جتاهـ}$ $\qquad$ $\text{جتا } ٢\text{هـ} = \text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}$

$\text{جتا } ٢\text{هـ} = ٢ \text{ جتا}^{٢}\text{هـ} - ١$ $\qquad$ $\text{جتا } ٢\text{هـ} = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢}\text{هـ}$

$$\text{ظا } ٢\text{هـ} = \frac{٢ \text{ ظاهـ}}{١ - \text{ظا}^{٢}\text{هـ}}$$

ثانياً- متطابقات نصف الزاوية :

$\text{جا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{١}{٢} (١ - \text{جتاهـ})$ $\qquad$ $\text{جتا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{١}{٢} (١ + \text{جتاهـ})$

$$\text{ظا}^{٢} \frac{\text{هـ}}{٢} = \frac{١ - \text{جتاهـ}}{١ + \text{جتاهـ}}$$

قوانين التحويل :

أولاً- تحويل المجموع أو الفرق إلى حاصل ضرب :

(١) $\text{جا أ} + \text{جا ب} = ٢ \text{ جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

(٢) $\text{جا أ} - \text{جا ب} = ٢ \text{ جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

(٣) $\text{جتا أ} + \text{جتا ب} = ٢ \text{ جتا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جتا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

(٤) $\text{جتا أ} - \text{جتا ب} = -٢ \text{ جا}\left(\frac{\text{أ}+\text{ب}}{٢}\right) \text{جا}\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

ثانياً- تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق :

(١) $\text{جاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) + \text{جا}(\text{س}-\text{ص})\right)$

(٢) $\text{جتاس جاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) - \text{جا}(\text{س}-\text{ص})\right)$

(٣) $\text{جتاس جتاص} = \frac{١}{٢}\left(\text{جتا}(\text{المجموع}) + \text{جتا}(\text{الفرق})\right)$

(٤) $\text{جاس جاص} = \frac{-١}{٢}\left(\text{جتا}(\text{المجموع}) - \text{جتا}(\text{الفرق})\right)$

العلاقة بين قياسات زوايا المثلث وأطوال أضلاعه :

أولاً : قاعدة جيوب التمام :

في أي مثلث أ ب جـ يكون ،

$$\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - ٢\,\text{بَ}\,\text{جَـ}\ \text{جتا أ} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ}\,\text{جَـ}}$$

$$\text{بَ}^{٢} = \text{أَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - ٢\,\text{أَ}\,\text{جَـ}\ \text{جتا ب} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{أَ}^{٢} + \text{جَـ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{٢\,\text{أَ}\,\text{جَـ}}$$

$$\text{جَـ}^{٢} = \text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - ٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}\ \text{جتا جـ} \quad \text{ومنها} \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^{٢} + \text{بَ}^{٢} - \text{جَـ}^{٢}}{٢\,\text{أَ}\,\text{بَ}}$$

تستخدم هذه القاعدة إذا عُلم طولا ضلعين في $\triangle$ أ ب جـ وقياس الزاوية المحصورة بينها .

تستخدم هذه القاعدة إذا عُلمت أطوال أضلاع $\triangle$ أ ب جـ أو النسبة بينها .

ثانياً : قاعدة الجيوب:

" في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها "

أي ان : في أي مثلث أ ب جـ يكون ، $\boxed{\dfrac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \dfrac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \dfrac{\text{جَـ}}{\text{جا جـ}}}$

ثالثاً : حساب مساحة المثلث بمعلومية ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

الإحصاء والاحتمالات

الإحصاء طرق عرض البيانات الإحصائية: (١) العرض الجدولي (٢) العرض البياني

التكرار النسبي:

التكرار النسبي لأي صفة هو تكرار تلك الصفة مقسوماً على مجموع التكرارات .

$\therefore$ التكرار النسبي لصفة = $\frac{\text{تكرار الصفة}}{\text{مجموع التكرارات}}$

ملاحظات: (١) مجموع التكرارات النسبية = ١

(٢) يمكن تكوين جدول تكراري يسمى " الجدول التكراري النسبي "

التكرار المئوي: التكرار المئوي لأي صفة هو التكرار النسبي لتلك الصفة مضروباً في ١٠٠

$\therefore$ التكرار المئوي لصفة ما = التكرار النسبي × ١٠٠

ملاحظات: (١) مجموع التكرارات المئوية للصفات = ١٠٠

(٢) يمكن تكوين جدول تكراري يسمى " الجدول التكراري المئوي "

المتوسطات :

مقاييس النزعة المركزية :(١) الوسط الحسابي (٢) الوسيط (٣) المنوال

أولاً : الوسط الحسابي :

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو القيمة التي لوحلت محل كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية .

(١) الوسط الحسابي لبيانات غير مبوبة (مفردة) :

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}}$

(٢) الوسط الحسابي للبيانات المبوبة (المجدولة) :

(أ) من الجدول التكراري البسيط

الوسط الحسابي = $\frac{\sum \text{س} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}}$

(ب) من الجدول التكراري ذو المجموعات

الوسط الحسابي = $\frac{\sum \text{س} \times \text{ك}}{\sum \text{ك}}$

حيث س مركز الفئة = $\frac{\text{بدايتها} + \text{نهايتها}}{٢}$

، ك تكرار الفئة ، $\sum$ ك مجموع التكرارات

مميزات الوسط الحسابي:

(١) يأخذ جميع القيم في الاعتبار .

(٢) شائع الاستخدام ويمكن الاستدلال به في كثير من الدراسات .

(٣) لا يحتاج في حسابه إلى ترتيب البيانات .

عيوب الوسط الحسابي:

(١) يتأثر بالقيم المتطرفة من حيث الكبر والصغر . (٢) لا يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية .

(٣) يكون غير دقيق لوصف مجموعة من البيانات . (٤) لا يمكن إيجاده من الرسم .

ثانياً : الوسيط :

الوسيط هو القيمة العددية التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً أي أن :

عدد القيم التي تكبر الوسيط = عدد القيم التي تصغر الوسيط

طرق حساب الوسيط :

(١) الوسيط للبيانات غير المبوبة (المفردة) :

* نرتب القيم تصاعدياً أو تنازلياً .

* إذا كان عدد القيم (ن) فردياً فإن ترتيب الوسيط $\frac{ن + ١}{٢}$

* إذا كان عدد القيم (ن) زوجياً فإن الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين التي ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$

(٢) الوسيط للبيانات المبوبة (المجدولة) :

توجد طريقتان : (أ) الطريقة الحسابية (ب) الطريقة البيانية

أولاً : الطريقة الحسابية لإيجاد الوسيط :

الفئة الوسيطية هي الفئة التي يقع فيها الوسيط .

خطوات إيجاد الوسيط حسابياً :

(١) نكوّن الجدول التكراري المتجمع الصاعد أو النازل .

(٢) نوجد ترتيب الوسيط = $\frac{\sum ك}{٢}$ ونحدد مكانه في الجدول المتجمع الصاعد أو النازل .

(٣) نحسب الوسيط من القانون :

$$\text{الوسيط} = أ + \left(\frac{\text{ترتيب الوسيط} - ك_١}{ك_٢ - ك_١} \times ل \right)$$

حيث : أ : بداية الفئة الوسيطية . $ك_١$: التكرار السابق لترتيب الوسيط .

$ك_٢$: التكرار التالي لترتيب الوسيط . ل : طول الفئة .

مميزات الوسيط: (١) لا يتأثر بالقيم المتطرفة للبيانات . (٢) يمكن الحصول عليه بالرسم .

(٣) يمكن إيجاده في حالة البيانات الوصفية التي يمكن ترتيبها .

عيوب الوسيط: (١) لا يأخذ القيم في الاعتبار عند حسابه . (٢) لا يعتمد عليه في الدراسات الإحصائية كثيراً .

ثالثاً : المنوال : المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) في المجموعة

الطريقة الحسابية لحساب المنوال:

طريقة القانون :

يمكن حساب المنوال من خلال القانون :

$$\text{المنوال} = أ + \left(\frac{ك - ك_1}{2ك - ك_1 - ك_2} \times ل \right)$$

حيث : أ : بداية الفئة المنوالية (ذات التكرار الأكبر ك : تكرار الفئة المنوالية (ذات التكرار الأكبر)

$ك_1$: التكرار السابق للفئة المنوالية $ك_2$: التكرار اللاحق للفئة المنوالية ل : طول الفئة

مزايا المنوال :

(١) لا يتأثر بالقيم الشاذة (الكبيرة والصغيرة) . (٢) يمكن حسابه للبيانات الوصفية .

(٣) سهل الحساب سواء بالرسم او الحساب .

عيوب المنوال : (١) لا يأخذ في حسابه جميع القيم .

(٢) قد يكون للبيانات أكثر من منوال وبالتالي لا معنى له في بعض الدراسات الإحصائية .

رابعاً : الانحراف المعياري :

مقاييس النزعة غير كافية للمقارنة بين طبيعة البيانات الإحصائية لذلك نشأت مقاييس التشتت التي تقيس درجة تجانس (تقارب) او تشتت (تباعد) مفردات البيانات بعضها عن البعض .

الانحراف المعياري : يعتبر الانحراف المعياري من أهم وأدق مقاييس التشتت للبيانات عن وسطها الحسابي .

تعريفه : الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات انحرافات القراءات عن وسطها الحسابي

اولاً : الانحراف المعياري للبيانات غير المبوبة (المفردة) :

الانحراف المعياري يرمز له بالرمز ع وهو : $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}}$

حيث : $\bar{س}$ (الوسط الحسابي) $= \frac{\sum س}{ن}$ ، ن عدد القراءات

ويمكن إيجاد الانحراف من القانون التالي : $ع = \sqrt{\frac{\sum س^2}{ن} - \bar{س}^2}$

التباين :

هو مربع الانحراف المعياري أي أن : التباين = $ع_ن^2$

$$ع_ن^2 = \frac{\sum س^2}{ن} - \bar{س}^2$$ او $$ع_ن^2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}$$

ثانياً : الانحراف المعياري للبيانات المبوبة (المجدولة) :

يمكن إيجاد الانحراف المعياري للبيانات المبوبة من القانون :

$$ع_ن = \sqrt{\frac{\sum (س^2 ك)}{ن} - \bar{س}^2}$$

حيث : س : مراكز الفئات ، ك : التكرار المناظر لمراكز الفئات

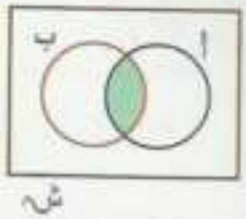
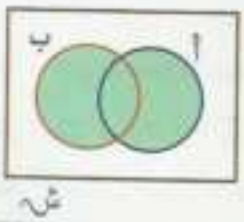
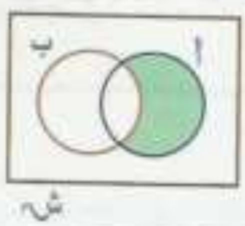
ن مجموع التكرارات $\sum ك$ ، $\bar{س}$: الوسط الحسابي = $\frac{\sum س ك}{\sum ك}$

الاحتمالات :

م	المفهوم	تعريفه	أمثلة
١	فراغ العينة (فضاء العينة)	جميع النواتج الممكنة لتجربة ما ويرمز له بالرمز ف	في الأمثلة السابقة : (١) ف = { ص ، ك } (٢) ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
٢	الحادثة (أ)	مجموعة جزئية من فراغ العينة ، أ ⊂ ف	(١) حدث الحصول على صورة أ = { ص } (٢) حدث الحصول على عدد زوجي أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }
٣	الحادثة البسيطة	هي مجموعة جزئية من فراغ العينة بحيث تشتمل على عنصر واحد .	أ = حادثة الحصول على عدد يقبل القسمة على ٦ أ = { ٦ }
٤	الحادثة غير البسيطة	مجموعة جزئية من فراغ العينة بشرط الا تحتوي على عنصر واحد .	أ = حادثة الحصول على عدد فردي ، أ = { ١ ، ٣ ، ٥ }
٥	الحادثة المستحيلة	الحادثة التي لا يمكن وقوعها ويرمز لها بالرمز ∅	أ = حادثة الحصول على عدد يقبل القسمة على ٧ ∴ أ = ∅
٦	الحادثة المؤكدة	هي الحادثة المؤكد وقوعها أي لابد من حدوثها ويرمز لها بالرمز ف وهي تمثل فراغ العينة .	أ = حادثة الحصول على عدد اقل من او يساوي ٦ أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
٧	الحادثتان المتنافيتان	يقال أن أ ، ب حادثتان متنافيتان إذا كان وقوع احدهما يمنع وقوع الأخرى أي ان ، أ ∩ ب = ∅ (لا يمكن وقوعها معاً)	أ = حادثة الحصول على عدد زوجي ب = حادثة الحصول على عدد فردي ∴ أ ، ب حادثتان متنافيتان أ ∩ ب = ∅

العمليات على الحوادث :

إذا كانت أ ، ب حادثتين في ش فإن :

الحادثة	التفسير	التوضيح بشكل فن
أَ (مكملة الحادثة أ) (متممة الحادثة أ)	عدم وقوع الحادثة أ	
أ ∩ ب	وقوع الحادثتين أ ، ب معاً (الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب)	
أ ∪ ب	* وقوع أ او ب او كليهما * وقوع احدهما على الأقل (الحادثة التي تتكون من عناصر أ أو ب أو كليهما)	
أ − ب = أ ∩ بَ	* حادثة وقوع أ وعدم وقوع ب (هي الحادثة التي تتكون من عناصر أ والتي لا تنتمي إلى ب)	

ملاحظات هامة :

(١) أ ∩ ∅ = ∅ ، أ ∩ ش = أ ، أ ∩ أَ = ∅

(٢) أ ∪ ∅ = أ ، أ ∪ ش = ش ، أ ∪ أَ = ش

الفضاء متساوي الاحتمال :

إذا كانت ش تحتوي على ن عنصراً وكانت هناك حادثة أ تحتوي على ل عنصراً فإن :

احتمال وقوع الحادثة أ = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ش}}$

ويرمز له بالرمز : $\boxed{ع(أ) = \frac{ل}{ن}}$

ملاحظات هامة:

(١) $\cdot \leqslant$ ل $($ أ $) \leqslant ١$ اي ان، ل (أ) $\in$ [٠ ، ١]

(٢) إذا كانت أ هي الحادثة المستحيلة اي ان، أ $= \varnothing$ فإن، ل (أ) = صفر

$\therefore$ $\boxed{\text{ل}(\varnothing) = \text{صفر}}$

(٣) إذا كانت أ هي الحادثة المؤكدة اي ان، أ = ف فإن، ل (أ) = ١

$\therefore$ $\boxed{\text{ل}(\text{ف}) = ١}$

(٤) إذا كانت ف = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، .... ، $أ_ن$ } فإن الدالة ل تسمى دالة احتمال إذا كان،

ل ($أ_١$) + ل ($أ_٢$) + ل ($أ_٣$) + ... + ل ($أ_ن$) = ١

اي ان، $\boxed{\sum_{ر=١}^{ن} \text{ل}(أ_ر) = ١}$

خواص دالة الاحتمال :

(١) إذا كانت $\acute{أ}$ هي الحادثة المكملة للحادثة أ فإن، $\boxed{\text{ل}(\acute{أ}) = ١ - \text{ل}(أ)}$

(٢) إذا كانت أ $\subset$ ب فإن، $\boxed{\text{ل}(أ) \leqslant \text{ل}(ب)}$

(٣) إذا كانت أ ، ب اي حادثتين فإن،

$\boxed{\text{ل}(أ \cup ب) = \text{ل}(أ) + \text{ل}(ب) - \text{ل}(أ \cap ب)}$

نتائج هامة:

(١) إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين فإن، ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) لأن أ $\cap$ ب $= \varnothing$

(٢) لأي حادثتين أ ، ب فإن، ل (ب − أ) = ل (ب) − (أ $\cap$ ب)

(٣) إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين فإن، ل (ب − أ) = ل (ب) ، ل (أ − ب) = ل (أ)

ملاحظات هامة :

(١) الجدول التالي يبين عدد طرق سحب عينة حجمها (ر) من تجمع عينة حجمه (ن)

السحب دون إحلال (إرجاع)		السحب مع الإحلال (الإرجاع)	
دون ترتيب	مع الترتيب	دون ترتيب	مع الترتيب
$\binom{ن}{ر}$	$^{ن}ل_{ر}$	$\binom{ن + ر - ١}{ر}$	$ن^{ر}$

(٢) ل (أ) + ل ($\acute{أ}$) = ١

الاحتمال المشروط:

وهو الاحتمال الذي يقع تحت شرط معين .

إذا كانت أ ، ب حادثتين في فراغ العينة وكان $ح(ب) \neq 0$ فإن ، $\boxed{ح(أ / ب) = \dfrac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)}}$

وتقرأ $ح(أ / ب)$ ، احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب أو احتمال وقوع أ علماً بأن ب وقع بالفعل .

ملاحظات هامة:

(١) من العلاقة السابقة نجد ان ، $ح(أ \cap ب) = ح(ب) \cdot ح(أ / ب)$

(٢) قاعدة ضرب الاحتمالات :

$$ح(أ_1 \cap أ_2 \cap أ_3) = ح(أ_1) \cdot ح(أ_2 / أ_1) \cdot ح(أ_3 / أ_1 \cap أ_2)$$

الحوادث المستقلة:

نقول عن حادثتين أ ، ب من تجربة واحدة أنهما مستقلتان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر .

إذا كانت أ ، ب حادثتين في فراغ العينة فيقال أن أ ، ب حادثتان مستقلتان إذا كان ،

$$\boxed{ح(أ \cap ب) = ح(أ) \cdot ح(ب)}$$

ملاحظات هامة:

(١) إذا كان أ ، ب حادثتين مستقلتين فإن ،

$$ح(أ / ب) = ح(أ) \quad ، \quad ح(ب / أ) = ح(ب)$$

(٢) لأي حادثتين مستقلتين أ ، ب فإن ،

$$ح(أ / ب) \cdot ح(ب / أ) = ح(أ \cap ب)$$

مع تمنياتي لك ولجميع الطلاب والطالبات بالتوفيق والنجاح

دعواتكم هي غايتنا

إصدارات كتب استعداد

١ استعداد للاختبارات التحصيلية للكليات العلمية (الجزء النظري)
يحتوي على ملخص نظري لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

٢ استعداد للاختبارات التحصيلية للكليات العلمية (الجزء التطبيقي)
يحتوي على عدد ضخم من الأسئلة لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

٣ استعداد للاختبارات التحصيلية للكليات النظرية (الجزء النظري) بنين
يحتوي على ملخص نظري لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

٤ استعداد للاختبارات التحصيلية للكليات النظرية (الجزء التطبيقي) بنين
يحتوي على عدد ضخم من الأسئلة لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

٥ استعداد لاختبارات القبول للتخصصات النظرية (الجزء النظري) بنات
يحتوي على ملخص نظري لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

٦ استعداد لاختبارات القبول للتخصصات النظرية (الجزء التطبيقي) بنات
يحتوي على عدد ضخم من الأسئلة لجميع المناهج المطلوبة في الاختبار التحصيلي

مطابع الحميضي ت ٤١٣٠١٣٠ الرياض
ردمك ٩ - ٤٥٣٨ - ٠٠ - ٦٠٣ - ٩٧٨