مذكرة الفصل الخامس مع الحلول

3ث ـــ ف2

إعداد / جمال السيد سليمان ـ ثانوية ساجر

مكتب التربية والتعليم بقطاع السر

محافظة الدوادمي

المشرف التربوي /بندر تركي الروقي

مدير المدرسة / ضيف الله وسيود الكرشمي

الفصل الخامس

المتجهات

الفصل الخامس المتجهات

التهيئة : صـ 9

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية ، ثم أوجد إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما .

1) $(1 , 4) , (-2 , 4)$ $\qquad [\,3 \,،(-\frac{1}{2} , 4)\,]$

2) $(-5 , 3) , (-5 , 8)$ $\qquad [\,5 \,،(-5, \frac{11}{2})\,]$

3) $(2 , -9) , (-3 , -7)$ $\qquad [\,\sqrt{29} \,،(-\frac{1}{2} , -8)\,]$

4) $(-4 , -1) , (-6 , -8)$ $\qquad [\,\sqrt{53} \,،(-5, -\frac{9}{2})\,]$

أوجد قيمة x في كل مما يأتي مقربا الناتج إلي أقرب عشر .

5)

6)

7)

8)

(36 • 1 ، 4 ، 11• 1 ، 5• 4)

---

9) بالون : أطلق بالون يحتوي علي هواء ساخن في الفضاء . إذا كان البالون مربوطا بحبلين يمسك بكل منهما شخص يقف علي سطح الأرض ، والمسافة بين الشخصين 35ft بحيث كان قياس الزاوية بين كل من الحبلين والأرض 40° ، فأوجد طول كل من الحبلين إلي أقرب جزء من عشرة . (22 • 8ft)

أوجد جميع الحلول الممكنة لكل مثلث مما يأتي إن أمكن ، وإذا لم يوجد حل فاكتب لايوجد حل مقربا أطوال الأضلاع إلي أقرب عدد صحيح ، وقياس الزوايا إلي أقرب درجة .

10) $a = 10 , b = 7 , A = 128^\circ$ $\qquad (B = 33^\circ, C = 19^\circ, c \approx 4)$

11) $a = 15 , b = 16 , A = 127^\circ$ $\qquad$ (لا يوجد حل)

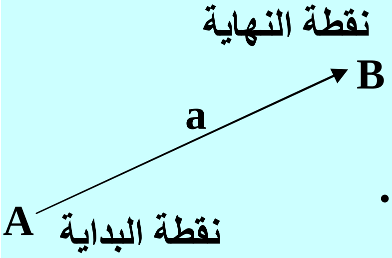
12) $a = 30 , b = 10 , A = 91^\circ$ $\qquad (B = 39^\circ, C = 50^\circ, c \approx 23)$

---

5 – 1 مقدمة في المتجهات

المتجه : هو كمية لها طول واتجاه ، فمثلا السرعة المتجهة للكرة تصف كلا من مقدار سرعة الكرة ، واتجاه حركتها .

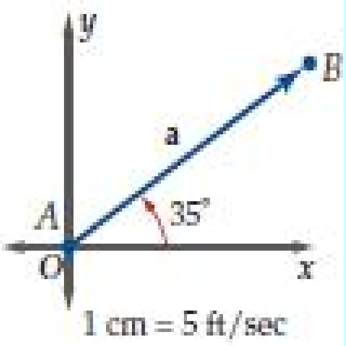
يمكن تمثيل المتجه هندسيا بقطعة مستقيمة متجهة ، أو سهم يظهر كل من القيمة والإتجاة . ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها نقطة البداية A ، ونقطة النهاية B .



ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو **a**

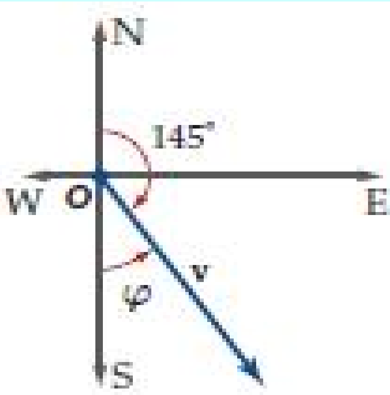
إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ، فإن المتجه يكون في الوضع القياسي ، ويعبر عن اتجاه المتجه بالزاوية التي يصنعها مع الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلا :

اتجاه المتجه **a** هو 35° .



أما طول المتجه فيمثله طول القطعة المستقيمة . إذا كان مقياس الرسم هو 1cm = 5 ft /s ، فإن طول المتجه **a** ، ويرمز له بالرمز | **a** |،يساوي 5 × 6 • 2 أو 13 ft / s .

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضا باستعمال زاوية الاتجاه ألربعي φ ، وتقرأ فاي ، وهي قياس اتجاهي بين 0° , 90° شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال ـ جنوب) . فمثلا زاوية اتجاه ألربعي للمتجه v في الشكل المجاور هي 35° شرق الجنوب ، وتكتب S 35°E . كما يمكن استعمال زاوية الاتجاه الحقيقي ، حيث تقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءا من الشمال . ويقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام ، فمثلا يكتب الاتجاه الذي يحدد زاوية قياسها 25° من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي علي الصورة 025° .



''

تحقق من فهمك : صـ 11

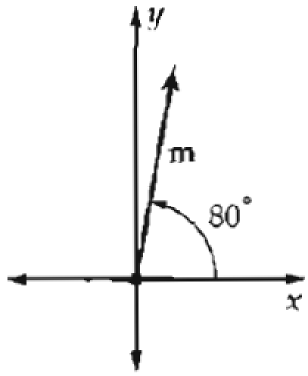
استعمل مسطرة ومنقلة ، لرسم متجه لكل من الكميات الآتية ، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

2A) t = 20 ft /s ، باتجاه 065° .

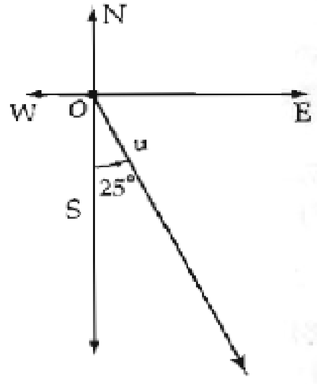
2B) u = 15mi / h ، باتجاه S 25°E .

2C) m = 60 N ، بزاوية قياسها 80° مع الأفقي .

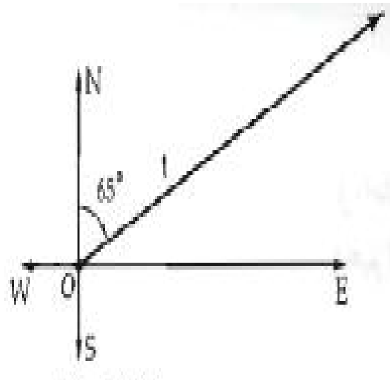
الحل :



1 cm = 30 N

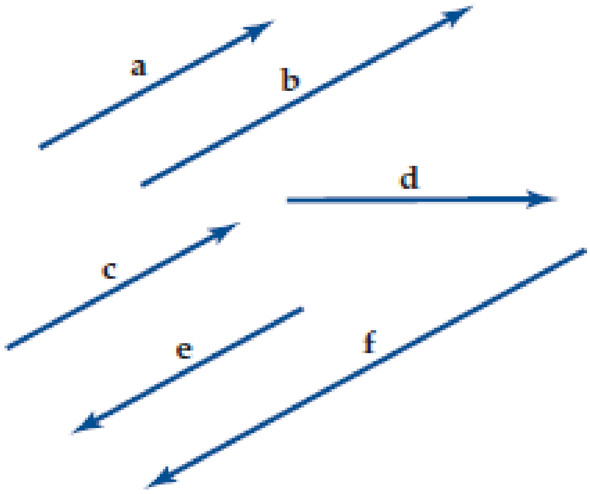


1 in = 10 m/h



1 in = 10 ft/s

أنواع المتجهات :



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان ، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه . فمثلا في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- **المتجهات المتكافئة** لها الاتجاه نفسه ، والطول نفسه . كما في الشكل المجاور ، $a = c$ ، لان لهما الطول والاتجاه نفسيهما ، لاحظ أن $a \neq b$ لأن $|a| \neq |b|$, $a \neq d$ ، لان لهما اتجاهين مختلفين .
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه ، لكن اتجاهيهما متعاكسان .

يكتب المتجه المعاكس للمتجه a علي الصورة $-a$, ففي الشكل المجاور $e = -a$.

المحصلة : عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجها ، يسمي المحصلة . ويكون لمتجه المحصلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين واحدا تلو الآخر . ويمكن إيجاد المحصلة هندسيا باستعمال قاعدة المثلث ، أو قاعدة متوازي الأضلاع .

مفهوم أساسي	إيجاد المحصلة

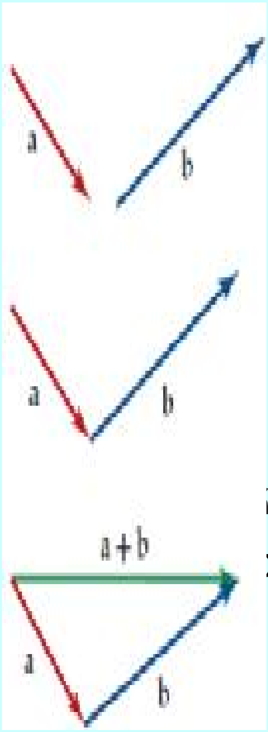
قاعدة المثلث

لإيجاد محصلة المتجهين a , b نتبع الخطوتين الآتيتين :

الخطوة 1 : أجر انسحابا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه a

الخطوة 2 : محصلة المتجهين a , b هو المتجه المرسوم من ن

بداية a إلي نقطة نهاية b



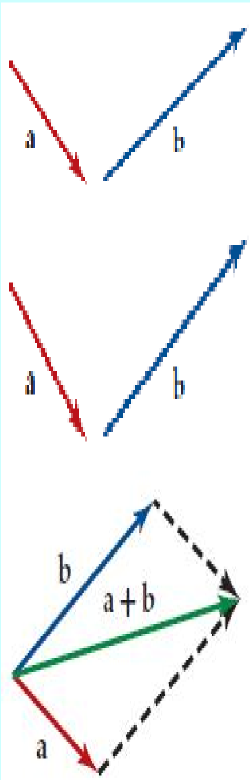
قاعدة متوازي الأضلاع

لإيجاد محصلة المتجهين a , b نتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 : أجر انسحابا للمتجه b بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه a

الخطوة 2 : أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه a , b

الخطوة 3 : محصلة المتجهين a , b هو المتجه الذي يمثل قطر متوازي الأضلاع .



المتجه الصفري :

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه ، فإن المحصلة هي المتجه الصفري ، ويرمز بالرمز 0 ، وطوله صفر وليس له اتجاه .

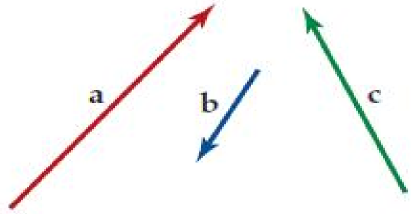
ضرب المتجه في عدد حقيقي :

مفهوم أساسي	ضرب المتجه في عدد حقيقي
إذا ضرب المتجه v في عدد حقيقي k فإن طول المتجه kv هو $\|v\| \, \|k\|$ ،ويتحدد إتجاهه بإشارة k . ● إذا كانت $k > 0$. فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه . ● إذا كانت $k < 0$. فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .	

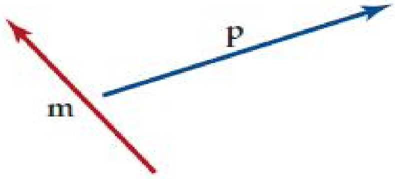
تحقق من فهمك : صـ 13

ارسم المتجه الذي يمثل كلا مما يأتي :

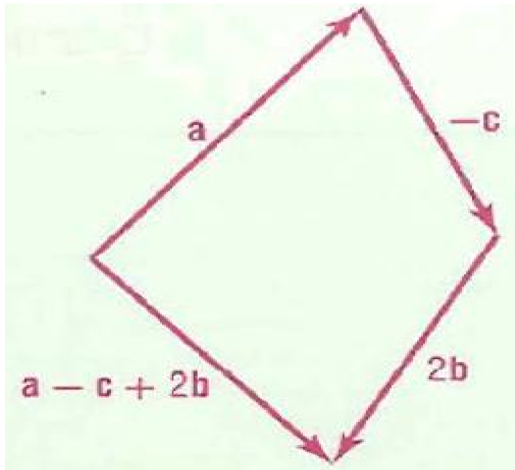
$a - c + 2b$ (4A

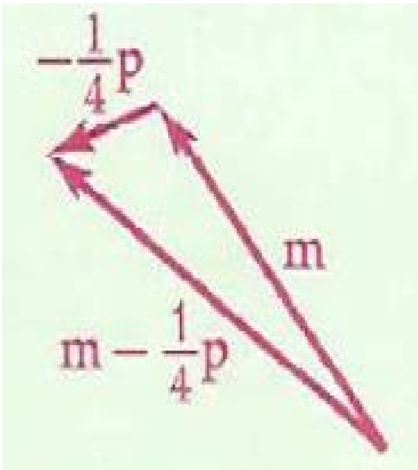


$m - \frac{1}{4}p$ (4B



الحل :





''

تدرب وحل المسائل : صـــ 16

حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي :

1) دفع صندوق بقوة مقدارها 125 N . (كمية قياسية)

2) تهب الرياح بسرعة 20 عقدة . (كمية قياسية)

3) يركض غزال بسرعة 15 m /s باتجاه الغرب . (كمية متجهه)

4) ضربت كرة قدم بسرعة 85 km / h . (كمية قياسية)

5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل . (كمية متجهه)

6) رمي حجر راسيا إلي أعلي بسرعة 50 ft /s . (كمية متجهه)

''

استعمل المسطرة والمنقلة ، لرسم متجه لكل من الكميات الآتية . واكتب مقياس الرسم في كل حالة .

7) h = 13in / s باتجاه °205 .

8) g = 6 km / h باتجاه N 70° W .

9) J = 5 ft /s وبزاوية قياسها °300 مع الأفقي .

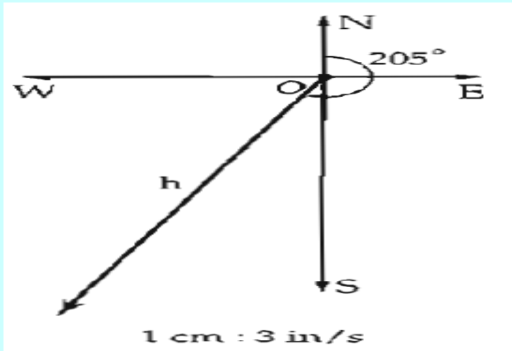
10) d = 28 km وبزاوية قياسها °35 مع الأفقي .

11) R = 40m وبزاوية قياسها °35 مع الأفقي .

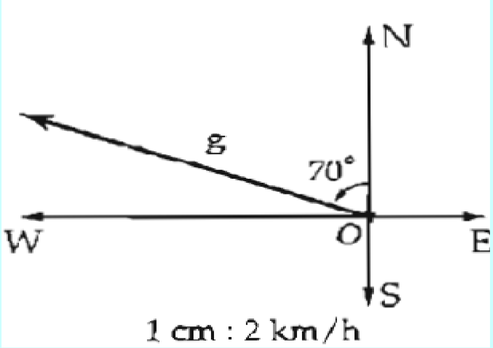
12) n = 32 m / s باتجاه °030 .

الحل :

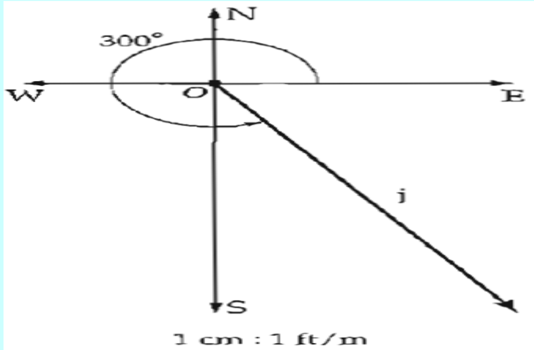
(7



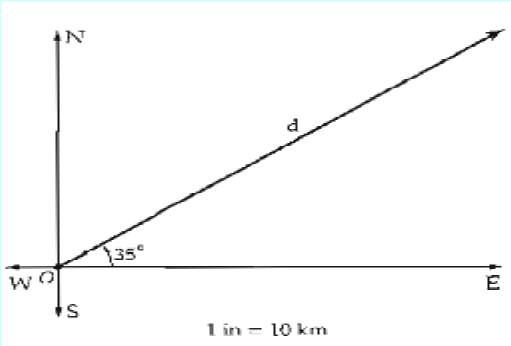
(8



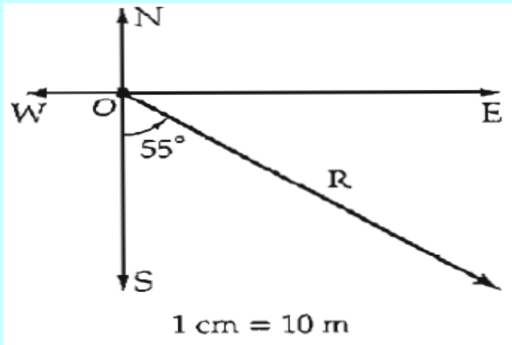
(9



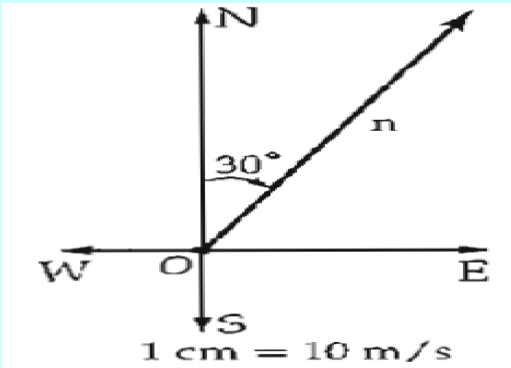
(10



(11

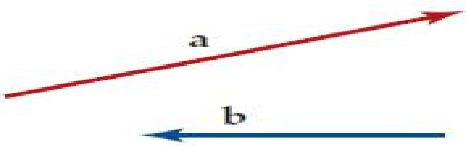


(12

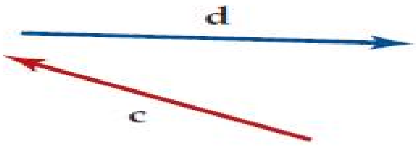


أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث أو قاعدة متوازي الأضلاع ، قرب المحصلة إلي أقرب جزء من عشرة من السنتمتر ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملا المسطرة والمنقلة .

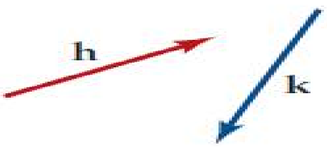
(13



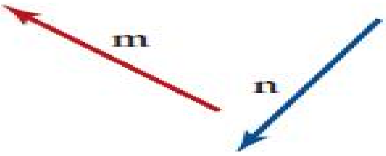
(14



(15



(16



13) نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع ، 45° , 1 • 4 cm
14) نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع ، 58° , 1 cm
15) نستخدم قاعدة المثلث ، 308° , 1 • 1 cm
16) نستخدم قاعدة المثلث ، 188° , 2 • 3 cm

،،،

حدد مقدار المحصلة الناتجة من جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي :

18) 18 N للأمام ، ثم 20 N للخلف . (2 N للخلف)

19) 100 m للشمال ، ثم 350 m للجنوب . (250 m للجنوب)

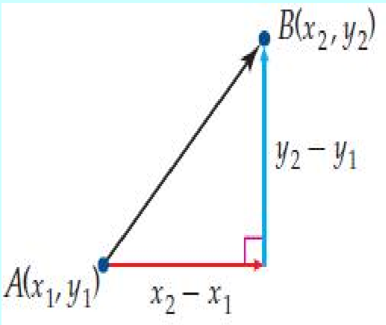
21) $15 m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها 60° مع الأفقي ، $9•8 m/s^2$ للأسفل .

(23° مع الأفقي , $8 • 15 m/s^2$)

،،،

المتجهات فى المستوى الإحداثى 2 ـــ 5

الصورة الإحداثية لمتجه :

مفهوم أساسي	الصورة الإحداثية لمتجه
الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي : $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$	

،،،

تحقق من فهمك : صـ 19

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي :

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

الحل :

1A) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (6 + 2, 1 + 7) = (8, 8)$

1B) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-9 - 0, -3 - 8) = (-9, -11)$

،،،

طول المتجه في المستوي ألإحداثي :

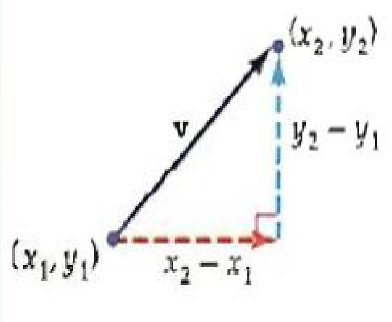
مفهوم أساسي	طول المتجه في المستوي ألإحداثي

إذا كان V متجها ، وكانت نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول V يعطي بالصيغة :

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت (α , b) هي الصورة الإحداثية للمتجه V فإن :

$$|\mathbf{V}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



تحقق من فهمك : صـ 20

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي :

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

2B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

الحل :

2A) $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6+2)^2 + (1+7)^2}$$

$$= \sqrt{64+64} = \sqrt{128} \approx 11 \bullet 3$$

2B) $$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-9-0)^2 + (-3-8)^2}$$

$$= \sqrt{81+121} = \sqrt{202} \approx 14 \bullet 2$$

العمليات علي المتجهات :

مفهوم أساسي	العمليات علي المتجهات

إذا كان $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ متجهين ، و k عددا حقيقيا ، فإن :

جمع متجهين : $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

طرح متجهين : $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

ضرب متجه في عدد حقيقي : $ka = (ka_{11}, ka_2)$

تحقق من فهمك : صـ 20

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات $y = (2, 5)$, $z = (-3, 0)$, $w = (-4, 1)$

3A) $4w + z$ 3B) $-3w$ 3C) $2w + 4y - z$

الحل :

3A) $4w + z = 4(-4, 1) + (-3, 0) = (-16, 4) + (-3, 0) = (-19, 4)$

3B) $-3w = -3(-4, 1) = (12, -3)$

3C) $2w + 4y - z = 2(-4, 1) + 4(2, 5) - (-3, 0)$

$= (-8, 2) + (8, 20) + (3, 0) = (3, 22)$

''

متجهات الوحدة :

يسمي المتجه الذي طوله 1 متجه الوحدة ويمكن التعبير عن المتجه غير الصفري v علي أنه حاصل ضرب متجه وحدة u في عدد حقيقي بنفس إتجاة v ، ولإيجاد u اقسم المتجه v علي طوله | v |

$$u = \frac{v}{|v|} = \frac{1}{|v|}v$$

''

تحقق من فهمك : صـ 21

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المعطي في كل مما يأتي :

4A) $w = (6, -2)$ 4B) $x = (-4, -8)$

الحل :

4A) $$u = \frac{1}{|w|}w = \frac{1}{|(6,-2)|}(6,-2) = \frac{1}{\sqrt{36+4}}(6,-2) = \frac{1}{\sqrt{40}}(6,-2)$$

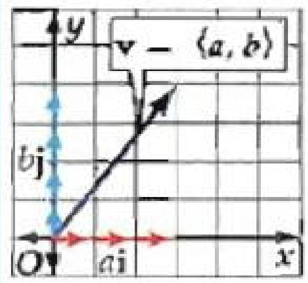
$$= \frac{1}{2\sqrt{10}}(6, -2) = \left\langle \frac{6}{2\sqrt{10}}, \frac{-2}{2\sqrt{10}} \right\rangle = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

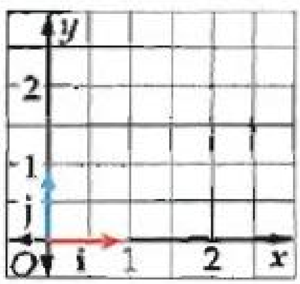
4 B) $$u = \frac{1}{|x|}x = \frac{1}{|(-4,-8)|}(-4,-8) = \frac{1}{\sqrt{16+64}}(-4,-8) = \frac{1}{\sqrt{80}}(-4,-8)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}(-4, -8) = \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{5}}, \frac{-8}{4\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

''

ملاحظة : يرمز لمتجهي الوحدة باتجاه المحور x الموجب ، والمحور y الموجب بالرمزين $i = (1 , 0) , j = (0 , 1)$ ، كما يسمي المتجهان i , j متجهي الوحدة القياسيين .





ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $v = (\alpha , b)$ علي الصورة $v = \alpha\, i + bj$ ، يسمي ناتج الجمع $\alpha\, i + bj$ توافقا خطيا للمتجهين i , j ، ويقصد به كتابة ناتج الجمع بدلالة متجهي الوحدة i , j .

''

تحقق من فهمك : صـ 22

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المعطي نقطتا بدايته ونهايته بدلالة متجهي الوحدة i , j في كل مما يأتي :

(5A $D(-6 , 0) , E(2 , 5)$

(5B $D(-3 , -8) , E(7 , 1)$

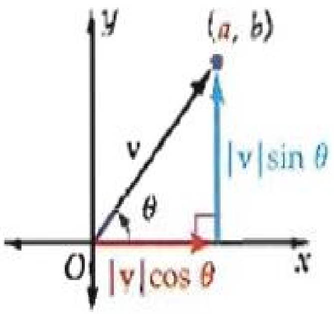
الحل :

(5A $\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (2+6, 5-0) = (8,5) = 8i + 5j$

(5B $\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (7+3, 1+8) = (10,9) = 10i + 9j$

''

ملاحظة :



يمكن تحديد اتجاه المتجه $v = (\alpha , b)$ باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها v مع المحور x الموجب ، ويمكن كتابة v علي الصورة الإحداثية ، أو بدلالة متجهي الوحدة i , j كما يأتي :

$$v = (\alpha , b) = (|v| \cos\theta , |v| \sin\theta)$$
$$= |v| \cos\theta\, i + |v| \sin\theta\, j$$

''

تحقق من فهمك : صـ 22

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطي طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يأتي :

(6A $|v| = 8 , 45^\circ$ (6B $|v| = 24 , 210^\circ$

الحل :

(6A $v = (|v| \cos\theta , |v| \sin\theta) = (8 \cos 45^\circ , 8 \sin 45^\circ)$

$$= \left\langle 8(\frac{\sqrt{2}}{2}), 8(\frac{\sqrt{2}}{2}) \right\rangle = (\ 4\sqrt{2}\ \ , 4\sqrt{2}\ \ )$$

$v = (\ |\ v\ |\ \cos\theta\ ,\ |\ v\ |\ \sin\theta\ ) = \ (24\cos 210^\circ, 24\sin 210^\circ)$ (6B

$$= \left\langle 24(\frac{\sqrt{3}}{2}), 24(\frac{1}{2}) \right\rangle = \ (\ 12\sqrt{3}\ \ , 12)$$

''

ملاحظة :

يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $v = (\ \alpha\ ,\ b\ )$ مع المحورx الموجب بحل المعادلة المثلثية نحصل علي : $\tan q = \frac{b}{a}, \tan q = \frac{|v|\sin q}{|v|\cos q}$

''

تحقق من فهمك : صـ 23

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهين الآتيين مع المحور x الموجب :

$-6\,i + 2\,j$ (6A $\qquad$ $(-3, -8)$ (6B

الحل :

(6A $\tan q = \frac{b}{a} = \frac{2}{-6} \rightarrow q = \tan^{-1}(\frac{1}{-3}) = 161 \bullet 6$

(6B $\tan q = \frac{b}{a} = \frac{-8}{-3} \rightarrow q = \tan^{-1}(\frac{-8}{-3}) = 249 \bullet 4$

''

تدرب وحل المسائل : صـ 24

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي

$A(-3, 1), B(4, 5)$ (1

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\ 6 + 3\ , 5 - 1\ ) = (\ 7\ , 4\ )$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \approx 8 \bullet 1$$

''

$A(2, -7), B(-6, 9)$ (2

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (\ -6 - 2\ , 9 + 7\ ) = (\ -8\ , 16\ )$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} \approx 17 \bullet 9$$

''

$A(10, -2), B(3, -5)$ (3

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1) = (3 - 10 , -5 + 2) = (-7 , -3)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \approx 7 \bullet 6$$

---

4) $A(-2 , 6) , B(1 , 10)$

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1) = (1 + 2 , 10 - 6) = (3 , 4)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

---

5) $A(2 \bullet 5 , -3) , B(-4 , 1 \bullet 5)$

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1) = (-4 - 2 \bullet 5 ,\ 1 \bullet 5 + 3)$

$= (-6 \bullet 5 ,\ 4 \bullet 5)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{42 \bullet 25 + 20 \bullet 25} = \sqrt{62 \bullet 5} \approx 7 \bullet 9$$

---

6) $A\left(\frac{1}{2} , -9\right) , B\left(6 , \frac{5}{2}\right)$

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1) = \left(6 - \frac{1}{2} , \frac{5}{2} + 9\right) = \left(\frac{11}{2} , \frac{23}{2}\right)$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\frac{121}{4} + \frac{529}{4}} = \sqrt{\frac{325}{2}} \approx 12 \bullet 7$$

إذا كان $h = (-6 , 2) , g = (-3 , -5) , f = (8 , 0)$ ، فأوجد كلا مما يأتي :

7) $4h - g$

الحل : $4h - g = 4(-6 , 2) - (-3 , -5)$

$= (-24 , 8) + (3 , 5) = (-21 , 13)$

---

8) $f + 2h$

الحل : $f + 2h = (8 , 0) + 2(-6 , 2) = (8 , 0) + (-12 , 4) = (-4 , 4)$

---

9) $2f + g - 3h$

الحل : $2f + g - 3h = 2(8 , 0) + (-3 , -5) - 3(-6 , 2)$

$= (16 , 0) + (-3 , -5) + (18 , -6) = (31 , -11)$

---

10) $f - 2g - 2h$

الحل : $f - 2g - 2h = (8, 0) - 2(-3, -5) - 2(-6, 2)$
$= (8, 0) + (6, 10) + (12, -4) = (26, 6)$

''

$h - 4f + 5g$ (11

الحل : $h - 4f + 5g = (-6, 2) - 4(8, 0) + 5(-3, -5)$
$= (-6, 2) + (-32, 0) + (-15, -25) = (-53, -23)$

''

$4g - 3f + h$ (12

الحل : $4g - 3f + h = 4(-3, -5) - 3(8, 0) + (-6, 2)$
$= (-12, -20) + (-24, 0) + (-6, 2) = (-42, -18)$

''

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه v نفسه في كل مما يأتي :

$v = (-2, 7)$ (14

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(-2,7)|}(-2,7) = \frac{1}{\sqrt{4+49}}(-2,7) = \frac{1}{\sqrt{53}}(-2,7)$$

$$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{53}}, \frac{7}{\sqrt{53}} \right\rangle = \left\langle \frac{-2\sqrt{53}}{53}, \frac{7\sqrt{53}}{53} \right\rangle$$

''

$v = (9, -3)$ (15

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(9,-3)|}(9,-3) = \frac{1}{\sqrt{81+9}}(9,-3) = \frac{1}{\sqrt{90}}(9,-3)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{10}}(9,-3) = \left\langle \frac{9}{3\sqrt{10}}, \frac{-3}{3\sqrt{10}} \right\rangle = \left\langle \frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10} \right\rangle$$

''

$v = (-8, -5)$ (16

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(-8,-5)|}(-8,-5) = \frac{1}{\sqrt{64+25}}(-8,-5) = \frac{1}{\sqrt{89}}(-8,-5)$$

$$= \left\langle \frac{-8}{\sqrt{89}}, \frac{-5}{\sqrt{89}} \right\rangle = \left\langle \frac{-8\sqrt{89}}{89}, \frac{-5\sqrt{89}}{89} \right\rangle$$

''

$v = (6, 3)$ (17

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(6,3)|}(6,3) = \frac{1}{\sqrt{36+9}}(6,3) = \frac{1}{\sqrt{45}}(6,3)$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}(6,3) = \left\langle \frac{6}{3\sqrt{5}}, \frac{3}{3\sqrt{5}} \right\rangle = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle$$

v = (– 1 , – 5) (18

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(-1,-5)|}(-1,-5) = \frac{1}{\sqrt{1+25}}(-1,-5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(-1,-5)$$

$$= \left\langle \frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-5}{\sqrt{26}} \right\rangle = \left\langle \frac{-\sqrt{26}}{26}, \frac{-5\sqrt{26}}{26} \right\rangle$$

v = (1 , 7) (19

الحل :

$$u = \frac{1}{|v|}v = \frac{1}{|(1,7)|}(1,7) = \frac{1}{\sqrt{1+49}}(1,7) = \frac{1}{\sqrt{50}}(1,7)$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}}(1,7) = \left\langle \frac{1}{5\sqrt{2}}, \frac{7}{5\sqrt{2}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{7\sqrt{2}}{10} \right\rangle$$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المعطي نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي بدلالة متجهي الوحدة I , j :

D(4 , – 1) , E (5 , – 7) (20

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ **= (5 – 4 , – 7 + 1) = (1 , – 6) = i – 6 j**

D(9 , – 6) , E (– 7 , 2) (21

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ **= (– 7 – 9 , 2 + 6) = (1 , – 6) = – 16 i + 8 j**

D(3 , 11) , E (– 2 , – 8) (22

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (-2-3, -8-11) = (-5, -19) = -5\,i - 19j$

D(9 • 5 , 1) , E (0 , – 7 • 3) (23

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = $ (0 – 9 • 5 , – 7 • 3 – 1)

= (– 9 • 5 , – 8 • 3) = – 9 • 5 i – 8 • 3 j

D(– 4 , – 6) , E (9 , 5) (24

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (9+4, 5+6) = (13, 11) = 13\,i + 11\,j$

$D(\frac{1}{8}, 3), E(-4, \frac{2}{7})$ (25

الحل :

$\overrightarrow{DE} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (4 + \frac{1}{8}, \frac{2}{7} - 3) = (\frac{33}{8}, -\frac{19}{7}) = \frac{33}{8}\,i - \frac{19}{7}\,j$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه v المعطي طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كل مما يأتي :

$|v| = 12, 60^\circ$ (27

الحل : $v = (|v|\cos\theta, |v|\sin\theta) = (12\cos 60^\circ, 12\sin 60^\circ)$

$= \left\langle 12(\frac{1}{2}), 12(\frac{\sqrt{3}}{2}) \right\rangle = (6, 6\sqrt{3})$

$|v| = 16, 330^\circ$ (28

الحل : $v = (|v|\cos\theta, |v|\sin\theta) = (16\cos 330^\circ, 16\sin 330^\circ)$

$= \left\langle 16(\frac{\sqrt{3}}{2}), 16(\frac{-1}{2}) \right\rangle = (8\sqrt{3}, -8)$

$|v| = 4, 135^\circ$ (29

الحل : $v = (|v|\cos\theta, |v|\sin\theta) = (4\cos 135^\circ, 4\sin 135^\circ)$

$= \left\langle 4(\frac{-\sqrt{2}}{2}), 4(\frac{\sqrt{2}}{2}) \right\rangle = (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

---

30) $|\mathbf{v}| = 15\ ,\ 125^{\circ}$

الحل : $\mathbf{v} = (\,|\mathbf{v}|\cos\theta\ ,\ |\mathbf{v}|\sin\theta\,) = (15\cos 125^{\circ}\ ,\ 15\sin 125^{\circ})$

$= (-8 \bullet 6\ ,\ 12 \bullet 29)$

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الآتية مع المحور x الموجب :

31) $3\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j}$

الحل : $\tan q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{6}{3} \rightarrow q = \tan^{-1}(2) = 63 \bullet 4$

32) $-2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j}$

الحل : $\tan q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{-2} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{-2}\right) = 111 \bullet 8$

33) $-4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j}$

الحل : $\tan q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-3}{-4} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\dfrac{-3}{-4}\right) = 216 \bullet 9$

34) $(-5\ ,\ 9)$

الحل : $\tan q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{9}{-5} \rightarrow q = \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{-5}\right) = 119 \bullet 1$

بين إذا كان $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{CD}$ المعطاة نقطتا البداية والنهاية لكل منهما فيما يأتي متكافئين أولا وإذا كانا متكافئين ، فاثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك ، فاذكر السبب :

37) $A(3\ ,\ 5)\ ,\ B(6\ ,\ 9)$ ، $C(-4\ ,\ -4)\ ,\ D(-2\ ,\ 0)$

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1) = (6 - 3\ ,\ 9 - 5) = (3\ ,\ 4)$

$\overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1) = (-2 + 4\ ,\ 0 + 4) = (2\ ,\ 4)$

المتجهان مختلفان في المقدار والاتجاه لذا فهما غير متكافئان

38) $A(1\ ,\ -3)\ ,\ B(0\ ,\ -10)$ ، $C(11\ ,\ 8)\ ,\ D(10\ ,\ 1)$

الحل : $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1) = (0 - 1\ ,\ -10 + 3) = (-1\ ,\ -7)$

$\overrightarrow{CD} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1) = (10 - 11\ ,\ 1 - 8) = (-1\ ,\ -7)$

المتجهان لهما نفس المقدار والاتجاه لذا فهما متكافئان

3 – 5 الضرب الداخلى

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوي ألإحداثي :

مفهوم أساسي	الضرب الداخلي لمتجهين في المستوي الإحداثي
يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ كالآتي : $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	

''

المتجهان المتعامدان :

مفهوم أساسي	المتجهان المتعامدان
يكون المتجهان $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ متعامدين إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$	

''

ملاحظة : علي الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر أي أن $(0,0) \bullet (a_1, a_2) = 0a_1 + 0a_2 = \mathbf{0}$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر، لأن ليس له طول أو اتجاه .

''

تحقق من فهمك : صـ 27

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $u(3, -2)$, $v(-5, 1)$

1B) $u(-2, -3)$, $v(9, -6)$

الحل : 1A) ليسا متعامدين ، $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -15 - 2 = -17$

1B) متعامدين ، $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = -18 + 18 = 0$

''

خصائص الضرب الداخلي :

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

مفهوم أساسي	خصائص الضرب الداخلي
إذا كانت u , v , w وكان k عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة :	
الخاصية الإبدالية :	$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v} \bullet \mathbf{u}$
خاصية التوزيع :	$\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي :	$k(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \mathbf{u} \bullet k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري :	$\mathbf{0} \bullet \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه :	$\mathbf{u} \bullet \mathbf{u} = \lvert \mathbf{u} \rvert^2$

تحقق من فهمك : صـ 27

استعمل الضرب الداخلي ، لإيجاد طول كل من المتجهات الآتية :

2A) $b\,(12\,,\,16)$

2B) $c\,(-1\,,-7)$

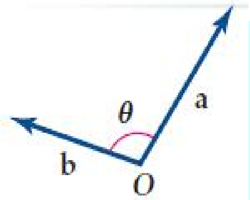
الحل : 2A) بما أن $b \bullet b = {}^2|\,b\,|$ فإن :

$$|\,b\,| = \sqrt{b \bullet b} = \sqrt{(12,16)\bullet(12,16)} = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20$$

2B) بما أن $c \bullet c = {}^2|\,c\,|$ فإن :

$$|\,c\,| = \sqrt{c \bullet c} = \sqrt{(-1,-7)\bullet(-1,-7)} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ملاحظة :



الزاوية بين أي متجهين غير صفريين $\alpha\,,\,b$ هي الزاوية بين هذين المتجهين عندما يكونان في وضع قياسي ، وتقاس هذه الزاوية دائما بحيث $0 \le \theta \le \pi$ أو $0 \le \theta \le 180^\circ$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين .

الزاوية بين متجهين :

مفهوم أساسي	الزاوية بين متجهين
إذ كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين α, b فإن :	$\cos\theta = \dfrac{a \bullet b}{|\,a\,|\,|\,b\,|}$

تحقق من فهمك : صـ 28

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $u\,,\,v$ في كل مما يأتي :

3A) $u(-5\,,-2)\,,\,v\,(4\,,4)$

3B) $u(9\,,5)\,,\,v\,(-6\,,7)$

الحل :

3A) $$\cos q = \frac{u \bullet v}{|\,u\,|\,|\,v\,|} = \frac{(-5,-2)\bullet(4,4)}{|(-5,-2)|\,|(4,4)|} = \frac{-20-8}{\sqrt{25+4}\,\sqrt{16+16}} = \frac{-28}{4\sqrt{58}} = \frac{-7}{\sqrt{58}}$$

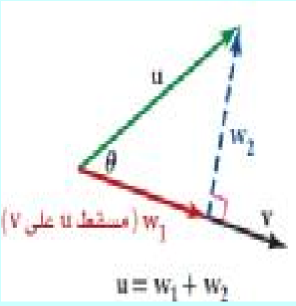
$$q = \cos^{-1}\frac{-7}{\sqrt{58}} \approx 157$$

3B) $$\cos q = \frac{u \bullet v}{|\,u\,|\,|\,v\,|} = \frac{(9,5)\bullet(-6,7)}{|(9,5)|\,|(-6,7)|} = \frac{-54+35}{\sqrt{81+25}\,\sqrt{36+49}} = \frac{-19}{\sqrt{106}\sqrt{85}}$$

$$q = \cos^{-1} \frac{-19}{\sqrt{106}\sqrt{85}} \approx 102$$

مسقط المتجه :

مفهوم أساسي **مسقط u علي v**



إذا كان u , v متجهين غير صفريين وكان w_1, w_2 مركبتي u بحيث w_1 مواز للمتجه v ، فإن w_1 يسمي مسقط المتجه u علي المتجه v ويكون :

$$w_1 = \left(\frac{u \bullet v}{|v|^2}\right)v$$

تحقق من فهمك : صـ 29

4) أوجد مسقط u = (1 , 2) علي v = (8 , 5) ، ثم أكتب u علي صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

الحل :

$$w_1 = \left(\frac{u \bullet v}{|v|^2}\right)v = \frac{(1,2) \bullet (8,5)}{|(8,5)|^2}(8,5) = \frac{8+10}{64+25}(8,5)$$

$$= \frac{18}{89}(8,5) = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = u - w_1 = (1,2) - \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle = \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{144}{89}, \frac{90}{89} \right\rangle + \left\langle -\frac{55}{89}, \frac{88}{89} \right\rangle$$

ملاحظة :

بالرغم من أن مسقط u علي v هو متجه يوازي v فإنه ليس من الضروري أن يكون لهذا المتجه اتجاه v نفسه .

تحقق من فهمك : صـ 29

5) أوجد مسقط u = (– 3 , 4) علي v = (6 , 1) ، ثم أكتب u علي صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

الحل :

$$w_1=\left(\frac{u\bullet v}{|v|^2}\right)v=\frac{(-3,4)\bullet(6,1)}{|(6,1)|^2}(6,1)=\frac{-18+4}{36+1}(6,1)$$

$$=\frac{-14}{37}(6,1)=\left\langle -\frac{84}{37},-\frac{14}{37}\right\rangle$$

$$u=w_1+w_2\rightarrow w_2=u-w_1=(-3,4)-\left\langle -\frac{84}{37},-\frac{14}{37}\right\rangle=\left\langle -\frac{27}{37},\frac{162}{37}\right\rangle$$

$$u=w_1+w_2=\left\langle -\frac{84}{37},-\frac{14}{37}\right\rangle+\left\langle -\frac{27}{37},\frac{162}{37}\right\rangle$$

،،،

ملاحظة :

إذا مثل المتجه u قوة فإن مسقط u علي v يمثل تأثير هذه القوة باتجاه v فمثلا إذ كنت تدفع صندوقا علي أرض مائلة باتجاه v بقوة مقدارها u فإن مسقط u علي v يمثل القوة التي تدفع الصندوق باتجاه v .

،،،

تدرب وحل المسائل : صـــ 32

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أو لا :

1) u(3 , – 5) , v (6 , 2)

الحل : $u\bullet v=a_1b_1+a_2b_2=18-10=8$ ، ليسا متعامدين

،،،

2) u(9 , – 3) , v (1 , 3)

الحل : $u\bullet v=a_1b_1+a_2b_2=9-9=0$ ، متعامدين

،،،

3) u(4 , – 4) , v (7 , 5)

الحل : $u\bullet v=a_1b_1+a_2b_2=28-20=8$ ، ليسا متعامدين

،،،

4) u = 11i + 7j , v = – 7i + 11j

الحل : $u\bullet v=a_1b_1+a_2b_2=-77+77=0$ ، متعامدين

،،،

5) u(– 4 , 6) , v (– 5 , – 2)

الحل : $u\bullet v=a_1b_1+a_2b_2=20-12=8$ ، ليسا متعامدين

6) زيت الزيتون : يمثل المتجه $u = (406 , 297)$ أعداد عبوتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر ، ويمثل المتجه $v = (27 • 5 , 15)$ سعر العبوة من كل من النوعين علي الترتيب :

a) أوجد $u • v$

b) فسر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة .

الحل : a) $u • v = a_1 b_1 + a_2 b_2 = 11165 + 4455 = 16520$

b) ثمن العبوات جميعها هو 16520

استعمل الضرب الداخلي ، لإيجاد طول المتجه المعطي :

7) $m = (-3 , 11)$

الحل : بما أن $|m|^2 = m • m$ فإن :

$$|m| = \sqrt{m \bullet m} = \sqrt{(-3,11) \bullet (-3,11)} = \sqrt{9+121} = \sqrt{130}$$

8) $r = (-9 , -4)$

الحل : بما أن $|r|^2 = r • r$ فإن :

$$|r| = \sqrt{r \bullet r} = \sqrt{(-9,-4) \bullet (-9,-4)} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$$

9) $v = (1 , -18)$

الحل : بما أن $|v|^2 = v • v$ فإن :

$$|v| = \sqrt{v \bullet v} = \sqrt{(1,-18) \bullet (1,-18)} = \sqrt{1+324} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

10) $t = (23 , -16)$

الحل : بما أن $|t|^2 = t • t$ فإن :

$$|t| = \sqrt{t \bullet t} = \sqrt{(23,-16) \bullet (23,-16)} = \sqrt{529+256} = \sqrt{785}$$

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u , v في كل مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة:

11) $u(0 , -5) , v(1 , -4)$

الحل :
$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(0,-5) \bullet (1,-4)}{|(0,-5)||(1,-4)|} = \frac{0+20}{\sqrt{0+25}\sqrt{1+16}} = \frac{20}{5\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{17}} \approx 14$$

‘‘‘

(12 u(7 , 10) , v (4 , – 4)

الحل :

$$\cos\theta = \frac{u\bullet v}{|u||v|} = \frac{(7,10)\bullet(4,-4)}{|(7,10)||(4,-4)|} = \frac{28-40}{\sqrt{49+100}\sqrt{16+16}} = \frac{-12}{4\sqrt{298}} = \frac{-3}{\sqrt{298}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{298}} \approx 100$$

‘‘‘

(13 u(– 2 , 4) , v (2 , – 10)

الحل :

$$\cos\theta = \frac{u\bullet v}{|u||v|} = \frac{(-2,4)\bullet(2,-10)}{|(-2,4)||(2,-10)|} = \frac{-4-40}{\sqrt{4+16}\sqrt{4+100}} = \frac{-44}{4\sqrt{130}} = \frac{-11}{\sqrt{130}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-11}{\sqrt{130}} \approx 164\bullet 7$$

‘‘‘

(14 u = – 2i + 3j , v = – 4i – 2j

الحل :

$$\cos\theta = \frac{u\bullet v}{|u||v|} = \frac{(-2,3)\bullet(-4,-2)}{|(-2,3)||(-4,-2)|} = \frac{8-6}{\sqrt{4+9}\sqrt{16+4}} = \frac{2}{2\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{65}} \approx 82\bullet 9$$

‘‘‘

(15 مخيم كشفي : غادر يوسف ويحي مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب إذا كان المتجه u(3 , – 5) يمثل الطريق الذي سلكه يوسف ، والمتجه v (– 7 , 6) يمثل الطريق الذي سلكه يحي ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين .

الحل :

$$\cos\theta = \frac{u\bullet v}{|u||v|} = \frac{(3,-5)\bullet(-7,6)}{|(3,-5)||(-7,6)|} = \frac{-21-30}{\sqrt{9+25}\sqrt{49+36}} = \frac{-51}{17\sqrt{10}} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{-3}{\sqrt{10}} \approx 161\bullet 6$$

‘‘‘

أوجد مسقط u علي v ، ثم أكتب u علي صورة مجموع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u علي v

u = 3i + 6j , v = – 5i + 2j (16

الحل :

$$w_1 = (\frac{u \bullet v}{|v|^2})v = \frac{(3,6)\bullet(-5,2)}{|(-5,2)|^2}(-5,2) = \frac{-15+12}{25+4}(-5,2)$$

$$= \frac{-3}{29}(-5,2) = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \to w_2 = u - w_1 = (3,6) - \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle = \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{15}{29}, -\frac{6}{29} \right\rangle + \left\langle \frac{72}{29}, \frac{180}{29} \right\rangle$$

‘‘

u(5 , 7) , v (– 4 , 4) (17

الحل :

$$w_1 = (\frac{u \bullet v}{|v|^2})v = \frac{(5,7)\bullet(-4,4)}{|(-4,4)|^2}(-4,4) = \frac{-20+8}{16+16}(-4,4)$$

$$= \frac{1}{4}(-4,4) = (-1,1)$$

$$u = w_1 + w_2 \to w_2 = u - w_1 = (5,7) - (-1,1) = (6,6)$$

$$u = w_1 + w_2 = (-1,1) + (6,6)$$

‘‘

u = 6i + j , v = – 3i + 9j (18

الحل :

$$w_1 = (\frac{u \bullet v}{|v|^2})v = \frac{(6,1)\bullet(-3,9)}{|(-3,9)|^2}(-3,9) = \frac{-18+9}{9+81}(-3,9)$$

$$= \frac{-9}{90}(-3,9) = \frac{-1}{10}(-3,9) = \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \to w_2 = u - w_1 = (6,1) - \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle = \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{3}{10}, \frac{-9}{10} \right\rangle + \left\langle \frac{57}{10}, \frac{19}{10} \right\rangle$$

‘‘

u(2 , 4) , v (– 3 , 8) (19

الحل :

$$w_1 = \left(\frac{u \bullet v}{|v|^2}\right)v = \frac{(2,4)\bullet(-3,8)}{|(-3,8)|^2}(-3,8) = \frac{-6+32}{9+64}(-3,8)$$

$$= \frac{26}{73}(-3,8) = \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 \rightarrow w_2 = u - w_1 = (2,4) - \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle = \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73} \right\rangle$$

$$u = w_1 + w_2 = \left\langle \frac{-78}{73}, \frac{208}{73} \right\rangle + \left\langle \frac{224}{73}, \frac{84}{73} \right\rangle$$

‘‘‘

أوجد متجها يعامد المتجه المعطي في كل مما يأتي :

(– 2 , – 8) (22

الحل : لإيجاد متجه يعامد المتجه المعطي نبدل الإحداثيات مع تغيير إشارة أحدهما

إجابة ممكنة : (8 , – 2)

‘‘‘

(3 , 5) (23

الحل : إجابة ممكنة : (5 , – 3) .

‘‘‘

(7 , – 4) (24

الحل : إجابة ممكنة : (4 , 7) .

‘‘‘

(– 1 , 6) (25

الحل : إجابة ممكنة : (6 , 1) .

‘‘‘

إذا علمت كلا من v , u • v فأوجد u في كل مما يأتي :

v = (3 , – 6) , u • v = 33 (27

الحل : نفرض أن u = (α , b) وبما أن u • v = (α , b) • (3 , – 6)

33 = 3α – 6 b نفرض أن b = 1 ، بالتعويض 33 = 3α – 6 ← 39 = 3α

إذن α = 13 وبالتالي u = (13 , 1) تكون إجابة ممكنة

‘‘‘

v = (4 , 6) , u • v = 38 (28

الحل : نفرض أن $u = (\alpha , b)$ وبما أن $u \bullet v = (\alpha , b) \bullet (4 , 6)$
$38 = 4\alpha + 6b$ نفرض أن $b = 1$ ، بالتعويض $38 = 4\alpha + 6$ ← $32 = 4\alpha$
إذن $\alpha = 8$ وبالتالي $u = (8 , 1)$ تكون إجابة ممكنة

''

اختبر كل زوج من المتجهات في كل مما يأتي من حيث كونها متعامدة أو متوازية أو ليس كليهما :

30) $u\left(\frac{-2}{3},\frac{3}{4}\right) , v (9 , 8)$

الحل : متعامدان ، $u \bullet v = \left(\frac{-2}{3},\frac{3}{4}\right) \bullet (9 , 8) = -6 + 6 = 0$

''

31) $u(-1 , -4) , v (3 , 6)$

الحل : غير ذلك ، $u \bullet v = (-1 , -4) \bullet (3 , 6) = -3 - 24 = -27$

''

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كل مما يأتي ، قرب الناتج إلي أقرب جزء من عشر :

32) $u = i + 5j , v = -2i + 6j$

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u|\,|v|} = \frac{(1,5)\bullet(-2,6)}{|(1,5)|\,|(-2,6)|} = \frac{-2+30}{\sqrt{1+25}\,\sqrt{4+36}} = \frac{28}{4\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}$$

$$q = \cos^{-1}\frac{7}{\sqrt{65}} \approx 29 \bullet 7$$

''

33) $u = 4i + 3j , v = -5i - 2j$

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u|\,|v|} = \frac{(4,3)\bullet(-5,-2)}{|(4,3)|\,|(-5,-2)|} = \frac{-20-6}{\sqrt{16+9}\,\sqrt{25+4}} = \frac{-26}{5\sqrt{29}}$$

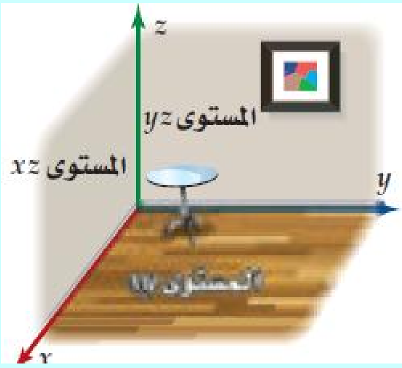
$$q = \cos^{-1}\frac{-26}{5\sqrt{29}} \approx 164 \bullet 9$$

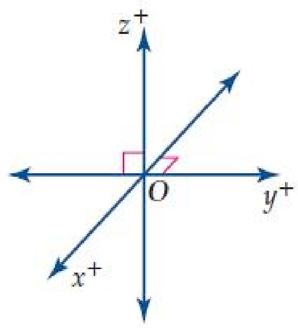
''

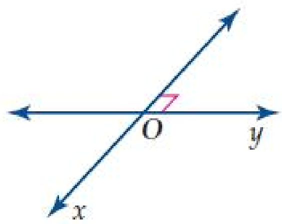
المتجهات فى الفضاء الثلاثى الابعاد 4 – 5

الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد :

يتكون المستوي الإحداثي الثنائي الأبعاد من خطي إعداد متعامدين هما المحورx والمحورy اللذان يتقاطعان في نقطة تسمي نقطة الأصل ، ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاط المستوي ، وبينما تحتاج إلي نظام إحداثي مكون من ثلاثة إبعاد ، لتعيين نقطة في الفضاء فنبدأ بالمستوي xy ثم نضيف محورا ثالثا يسمي المحورz يمر بنقطة الأصل ويعامد كلا من المحورين x , y ويقسم المحور الإضافي الفضاء إلي 8 مناطق يسمي كل منها الثمن حيث يمثل سطح الأرض المستوي xy ويمثل الجداران المسويين yz , xz







تمثل النقطة في الفضاء بثلاثيات مرتبة من الأعداد الحقيقية (x , y , z) ، ولتعيين مثل هذه النقطة ،عين أولا النقطة (x , y) في المستوي xy ، ثم تتحرك للأعلى أو الأسفل موازيا للمحورz حسب المسافة المتجهة التي يمثلها z

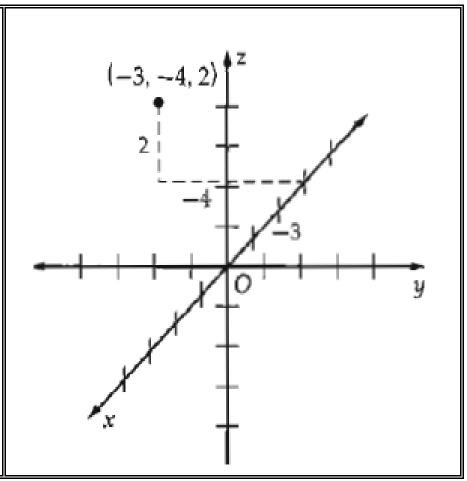
''

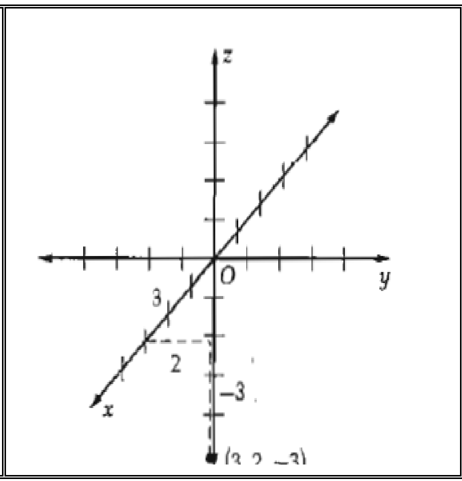
تحقق من فهمك : صـ 35

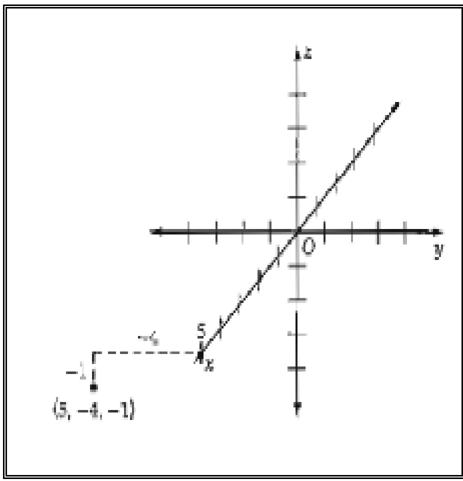
عين كلا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

1A) (– 3 , – 4 , 2)   1B) (3 , 2 , – 3)   1C) (5 , – 4 , – 1)

الحل :







''

قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء :

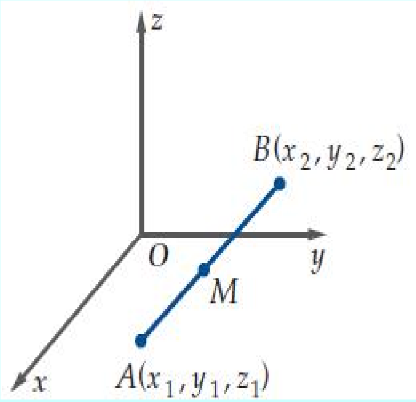
مفهوم أساسي	قانونا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تعطي المسافة بين النقطتين $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$ بالقانون :

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

وتعطي نقطة المنتصف **M** لـ $\overline{AB}$ بالقانون :

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$



تحقق من فهمك : صـ 36

2) طائرات : تفرض أنظمة السلامة ألا تقل المسافة بين الطائرات عن 0 • 5 mi في أثناء طيرانها ، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق احدي المناطق ، وفي لحظة معينة كانت إحداثيات موقعي الطائرتين (28000 , 250 – , 450) , (30000 , 150 , 300) ، مع العلم أن الإحداثيات معطاة بالأقدام ، فأجب :

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة ؟

B) إذا أطلقت ألعاب نارية ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين ، فم إحداثيات نقطة الانفجار .

الحل : (A

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$=\sqrt{(300-450)^2+(150+250)^2+(30000-28000)^2}$$

$$=\sqrt{22500+160000+4000000}=\sqrt{4182500}\approx 2045$$

نعم لان البعد بين الطائرتين حوالي 2045 قدم وهذه المسافة أقل من المسافة المسموح بها وهي نصف ميل .

(B

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

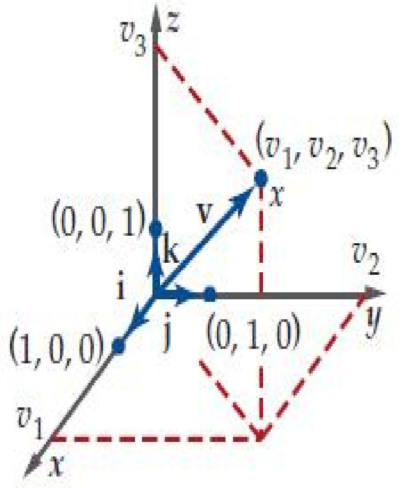
$$=\left(\frac{300+450}{2},\frac{150-250}{2},\frac{30000+28000}{2}\right)=\left(\frac{750}{2},-\frac{100}{2},\frac{58000}{2}\right)$$

= (375 , – 50 , 2900)

المتجهات في الفضاء :

إذا كان **v** متجها في الفضاء في وضع قياسي ، وكانت (u_1 , u_2 , u_3) نقطة نهايته ، فإننا نعبر عنه بالثلاثي المرتب (u_1 , u_2 , u_3) ، كما يعبر عن المتجه الصفري بالثلاثي **0 = (0 , 0 , 0)** ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالثلاثيات **j = (0 , 1 , 0) , k = (0 , 0 , 1)** **i = (1 , 0 , 0),** ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه **v** بدلالة متجهات الوحدة **k , j , i** بالصورة

$$(u_1 , u_2 , u_3) = u_1 i + u_2 j + u_3 k$$



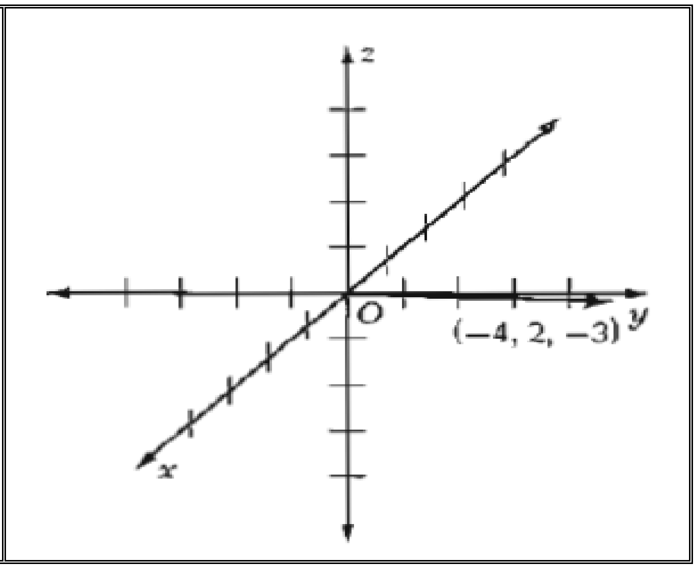
''

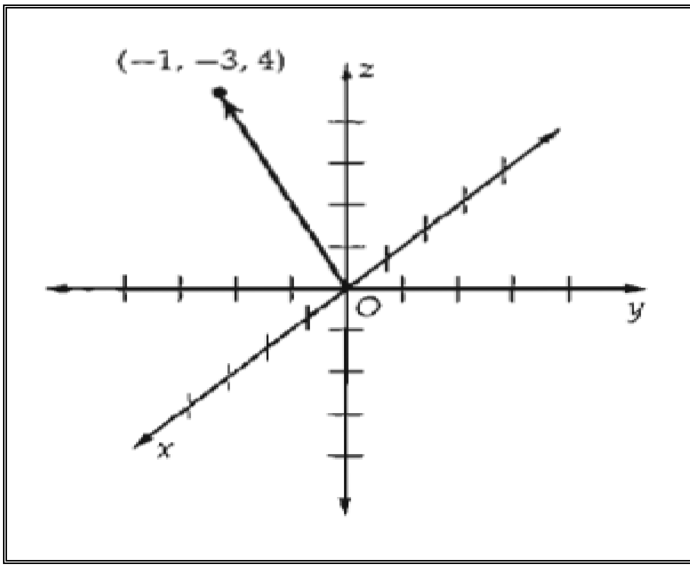
تحقق من فهمك : صـ 37

عين موقع كل من المتجهين الآتيين في الفضاء ومثلهما بيانيا :

u = (– 4 , 2 , – 3) (3A **w = – i – 3 j + 4 k (3B**

الحل :





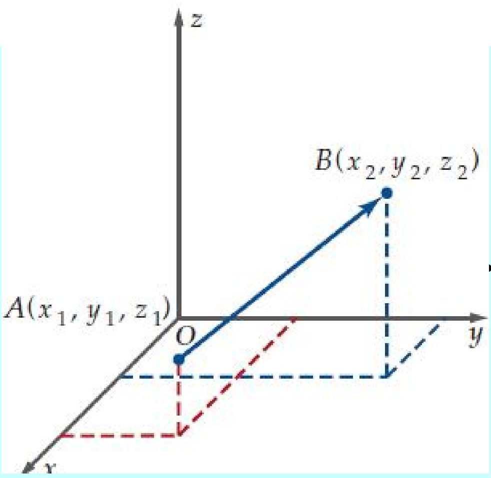
''

ملاحظة :

كما في المتجهات ذات البعدين نجد الصورة الإحداثية لقطعة مستقيمة متجهة من $A\,(x_1 , y_1 , z_1)$ إلي $B\,(x_2 , y_2 , z_2)$ ، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية .

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



وهذا يعني انه إذا كان $\overrightarrow{AB} = (a_1, a_2, a_3)$ ، فإن : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

ويكون متجه الوحدة u باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $u = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

تحقق من فهمك : صـ 38

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته ، ثم اوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كل مما يأتي :

A(– 2 , – 5 , – 5) , B(– 1 , 4 , – 2) (4A

A(– 1 , 4 , 6) , B(3 , 3 , 8) (4B

الحل: (4 A

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (1, 9, 3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{1 + 81 + 9} = \sqrt{91}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{91}}, \frac{9}{\sqrt{91}}, \frac{3}{\sqrt{91}} \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{91}}{91}, \frac{9\sqrt{91}}{91}, \frac{3\sqrt{91}}{91} \right\rangle$$

(4B

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (4, -1, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}} \right\rangle = \left\langle \frac{4\sqrt{21}}{21}, \frac{-\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21} \right\rangle$$

العمليات علي المتجهات في الفضاء :

مفهوم أساسي	العمليات علي المتجهات في الفضاء
إذا كان $a = (a_1, a_2, a_3) . b = (b_1, b_2, b_3)$ متجهين في الفضاء ، وكان k عددا حقيقيا فإن :	
جمع متجهين	$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
طرح متجهين	$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
ضرب متجه في عدد حقيقي	$ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$

تحقق من فهمك : صـ 38

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات (z(– 2 , 0 , 5) , w(– 1 , 4 , – 4) , y(3 , – 6 , 2

5A) $4w - 8z$ 5B) $3y + 3z - 6w$

الحل : 5A) $4w - 8z = 4(-1, 4, -4) - 8(-2, 0, 5)$

$= (-4, 16, -16) + (16, 0, -40) = (12, 16, -56)$

5B) $3y + 3z - 6w = 3(3, -6, 2) + 3(-2, 0, 5) - 6(-1, 4, -4)$

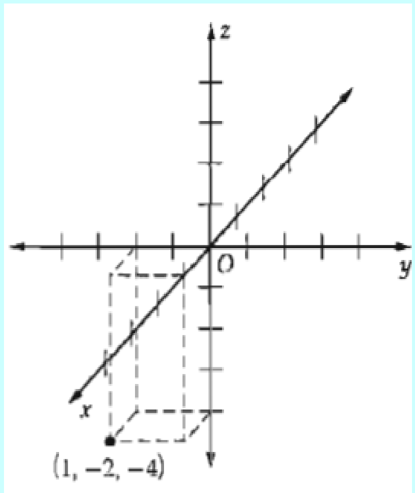
$= (9, -18, 6) + (-6, 0, 15) + (6, -24, 24) = (9, -42, 45)$

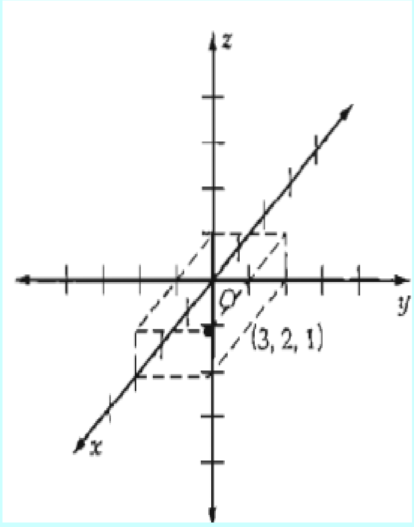
تدرب وحل المسائل : صـ 39

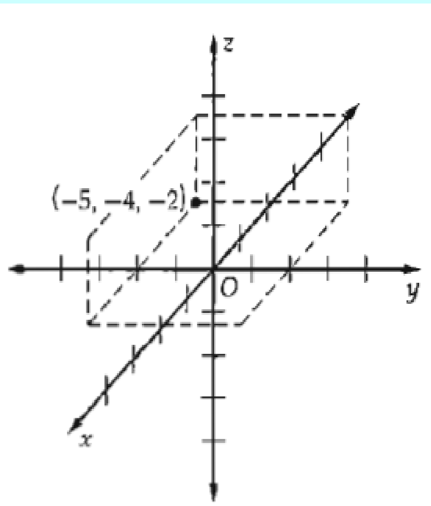
عين كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد :

1) $(1, -2, -4)$ 2) $(3, 2, 1)$ 3) $(-5, -4, -2)$

الحل :

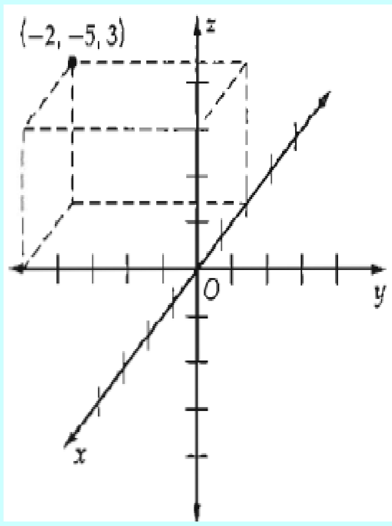


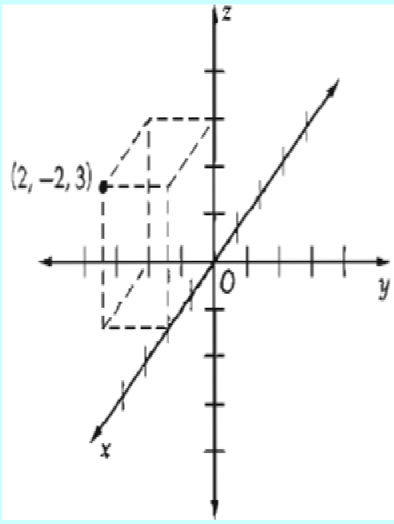


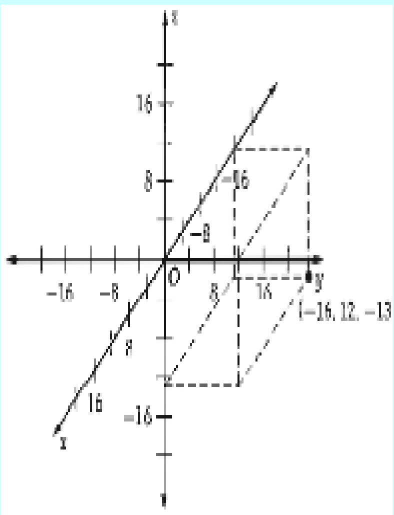


4) $(-2, -5, 3)$ 5) $(2, -2, 3)$ 6) $(-16, 12, -13)$

الحل :







أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها ، ثم أوجد إحداثيات منتصفها في كل مما يأتي :

7) (1 , 0 , 9) ,(– 4 , 10 , 4)

الحل :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(1+4)^2 + (0-10)^2 + (9-4)^2} = \sqrt{25+100+25} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

$$M\ (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

$$= (\frac{-4+1}{2}, \frac{0+10}{2}, \frac{9+4}{2}) = (-\frac{3}{2}, 5, \frac{13}{2})$$

8) (– 9 , – 2 , – 2) ,(– 6 , 6 , 3)

الحل :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-9+6)^2 + (-2-6)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+64+25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$M\ (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

$$= (\frac{-6-9}{2}, \frac{-2+6}{2}, \frac{-2+3}{2}) = (-\frac{15}{2}, 2, \frac{1}{2})$$

9) (– 4 , – 7 , 5) ,(8 , 3 , 4)

الحل :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-4-8)^2 + (-7-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{144+100+1} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$$

$$M\ (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

$$= (\frac{-4+8}{2}, \frac{-7+3}{2}, \frac{5+4}{2}) = (2, -2, \frac{9}{2})$$

(– 7 , 2 , – 5) ,(– 2 , – 5 , – 8) (10

الحل :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

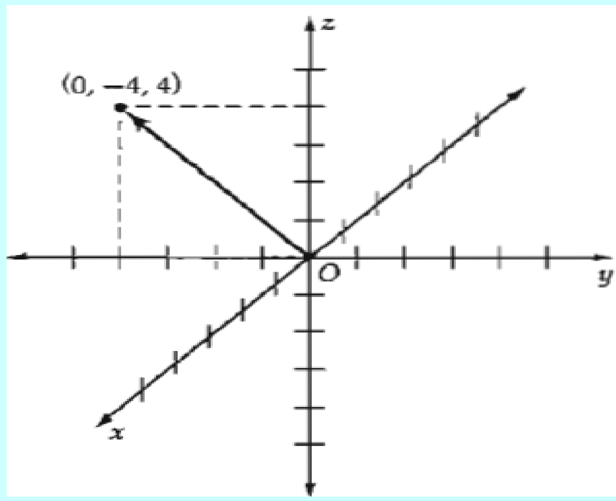
$$= \sqrt{(-2+7)^2 + (-5-2)^2 + (-8+5)^2} = \sqrt{25+49+9} = \sqrt{83}$$

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

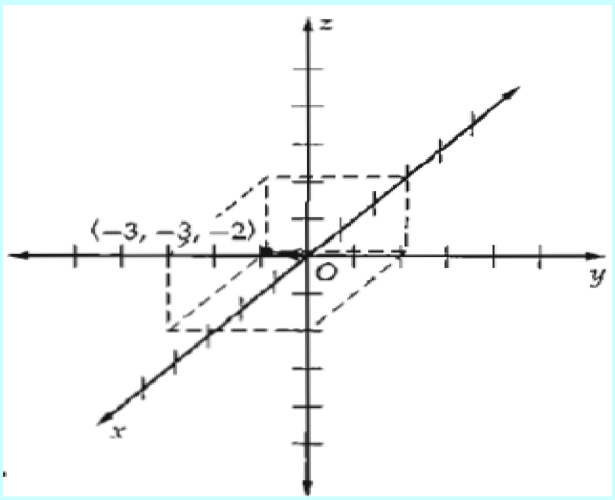
$$= \left(\frac{-2-7}{2}, \frac{-5+2}{2}, \frac{-8-5}{2} \right) = \left(-\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{2} \right)$$

عين موقع كل من المتجهات الآتية في الفضاء ، ثم مثله بيانيا :

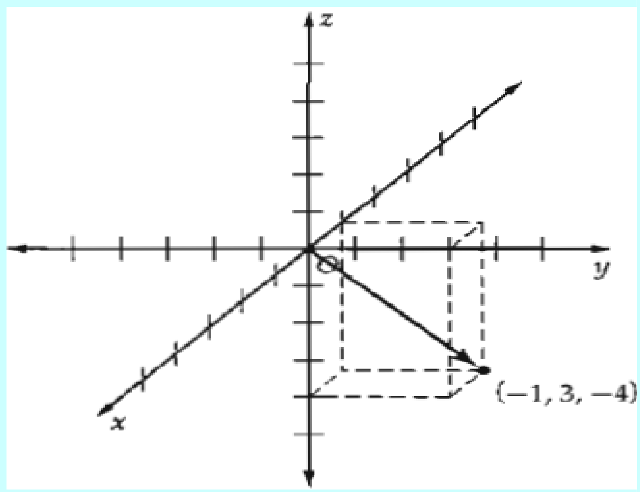
a = (0 , – 4 , 4) (12



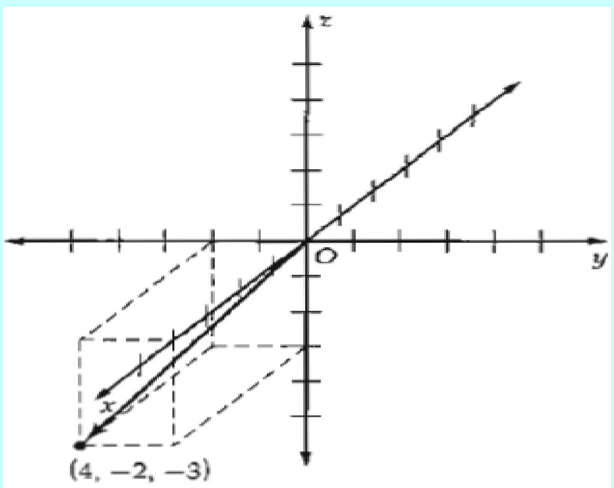
b = (– 3 , – 3 , – 2) (13



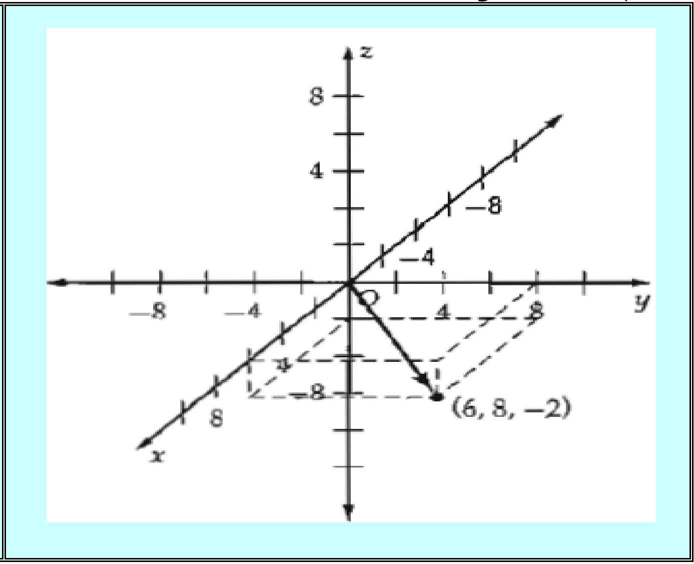
c = (– 1 , 3 , – 4) (14



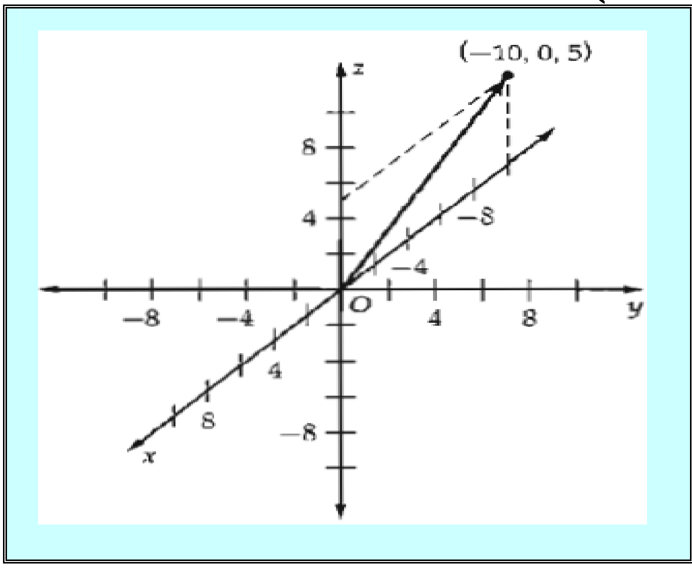
d = (4 , – 2 , – 3) (15



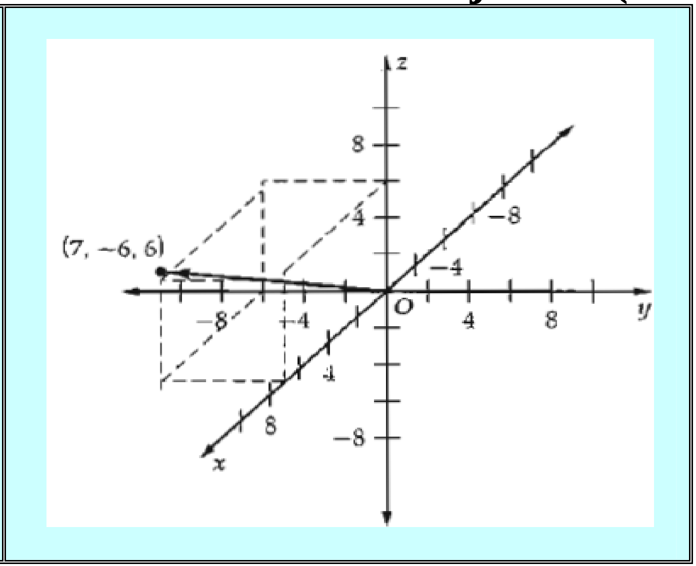
$v = 6\,i + 8\,j - 2\,k$ (16



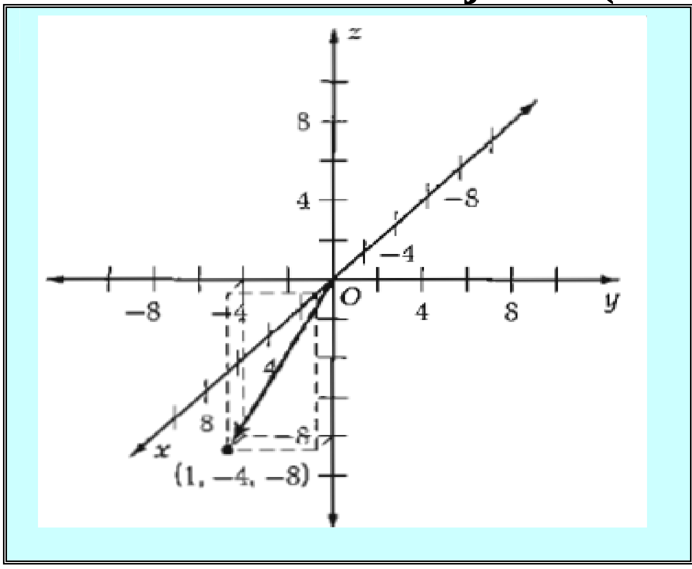
$w = -10\,i + 5\,k$ (17



$m = 7\,i - 6\,j + 6\,k$ (18



$n = i - 4\,j - 8\,k$ (19



أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي ، ثم اوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$:

A(– 5 , – 5 , – 9) , B(11 , – 3 , – 1) (20

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (16, 2, 8)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{256+4+64} = \sqrt{324} = 18$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{16}{18}, \frac{2}{18}, \frac{8}{18} \right\rangle = \left\langle \frac{8}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9} \right\rangle$$

A(– 4 , 0 , – 3) , B(– 4 , – 8 , 9) (21

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (0, -8, 12)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{0+64+144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{0}{4\sqrt{13}}, \frac{8}{4\sqrt{13}}, \frac{12}{4\sqrt{13}} \right\rangle = \left\langle 0, \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$$

''

A(3 , 5 , 1) , B(0 , 0 , – 9) (22

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-3, -5, -10)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{9+25+100} = \sqrt{134}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{-3}{\sqrt{134}}, \frac{-5}{\sqrt{134}}, \frac{-10}{\sqrt{134}} \right\rangle = \left\langle -\frac{3\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{134}, -\frac{5\sqrt{134}}{67} \right\rangle$$

''

A(– 3 , – 7 , – 12) , B(– 7 , 1 , 8) (23

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-4, 8, 20)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{16+64+400} = \sqrt{480} = 4\sqrt{30}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{-4}{4\sqrt{30}}, \frac{8}{4\sqrt{30}}, \frac{20}{4\sqrt{30}} \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\rangle$$

''

A(2 , – 5 , 4) , B(1 , 3 , – 6) (24

الحل :

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-1, 8, -10)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} = \sqrt{1+64+100} = \sqrt{165}$$

$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{-1}{\sqrt{165}}, \frac{8}{\sqrt{165}}, \frac{-10}{\sqrt{165}} \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{165}}{165}, \frac{8\sqrt{165}}{165}, -\frac{2\sqrt{165}}{33} \right\rangle$$

$A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$ (25

الحل :
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (-6, -15, 4)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{36 + 225 + 16} = \sqrt{277}$$
$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{-6}{\sqrt{277}}, \frac{-15}{\sqrt{277}}, \frac{4}{\sqrt{277}} \right\rangle = \left\langle -\frac{6\sqrt{277}}{277}, -\frac{15\sqrt{277}}{277}, \frac{4\sqrt{277}}{277} \right\rangle$$

$A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$ (26

الحل :
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (4, -15, 5)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{16 + 225 + 25} = \sqrt{266}$$
$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{4}{\sqrt{266}}, \frac{-15}{\sqrt{266}}, \frac{5}{\sqrt{266}} \right\rangle = \left\langle \frac{2\sqrt{266}}{133}, -\frac{15\sqrt{266}}{266}, \frac{5\sqrt{266}}{266} \right\rangle$$

$A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$ (27

الحل :
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (20, 32, 42)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{400 + 1024 + 1764} = \sqrt{3188} = 2\sqrt{797}$$
$$u = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \left\langle \frac{20}{2\sqrt{797}}, \frac{32}{2\sqrt{797}}, \frac{42}{2\sqrt{797}} \right\rangle = \left\langle \frac{10\sqrt{797}}{797}, -\frac{16\sqrt{797}}{797}, \frac{21\sqrt{797}}{797} \right\rangle$$

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

$a = (-5, -4, 3), \; b = (6, -2, -7), c = (-2, 2, 4)$

$6a - 7b + 8c$ (28

الحل :
$$6a - 7b + 8c = 6(-5, -4, 3) - 7(6, -2, -7) + 8(-2, 2, 4)$$
$$= (-30, -24, 18) + (-42, 14, 49) + (-16, 16, 32)$$
$$= (-88, 6, 99)$$

$7a - 5b$ (29

الحل :
$$7a - 5b = 7(-5, -4, 3) - 5(6, -2, -7)$$

$= (-35, -28, 21) + (-30, 10, 35) = (-65, -18, 56)$

‘‘

30) $2a + 5b - 9c$

الحل : $2a + 5b - 9c = 2(-5, -4, 3) + 5(6, -2, -7) - 9(-2, 2, 4)$

$= (-10, -8, 6) + (30, -10, -35) + (18, -18, -36)$

$= (38, -36, -65)$

‘‘

31) $6b + 4c - 4a$

الحل : $6b + 4c - 4a = 6(6, -2, -7) + 4(-2, 2, 4) - 4(-5, -4, 3)$

$= (36, -12, -42) + (-8, 8, 16) + (20, 16, -12)$

$= (48, 12, -38)$

‘‘

32) $8a - 5b - c$

الحل : $8a - 5b - c = 8(-5, -4, 3) - 5(6, -2, -7) - (-2, 2, 4)$

$= (-40, -32, 24) + (-30, 10, 35) + (2, -2, -4)$

$= (-68, -24, 55)$

‘‘

33) $-6a + b + 7c$

الحل : $-6a + b + 7c = -6(-5, -4, 3) + (6, -2, -7) + 7(-2, 2, 4)$

$= (30, 24, -18) + (6, -2, -7) + (-14, 14, 28) = (22, 36, 3)$

‘‘

أوجد كلا مما يأتي للمتجهات :

$x = -9i + 4j + 3k \ , y = 6i - 2j - 7k \ , z = -2i + 2j + 4k$

34) $7x + 6y$

الحل : $7x + 6y = 7(-9i + 4j + 3k) + 6(6i - 2j - 7k)$

$= (-63i + 28j + 21k) + (36i - 12j - 42k)$

$= (-27i + 16j - 21k) = (-27, 16, -21)$

‘‘

35) $3x - 5y + 3z$

الحل :

$3x - 5y + 3z = 3(-9i + 4j + 3k) - 5(6i - 2j - 7k) + 3(-2i + 2j + 4k)$

$= (-27i + 12j + 9k) + (-30i + 10j + 35k) + (-6i + 6j + 12k)$

$= (-63i + 28j + 56k) = (-63, 28, 56)$

‘‘

36) $4x + 3y + 2z$

الحل :

$4x + 3y + 2z = 4(-9i + 4j + 3k) + 3(6i - 2j - 7k) + 2(-2i + 2j + 4k)$
$= (-36i + 16j + 12k) + (18i - 6j - 21k) + (-4i + 4j + 8k)$
$= (-22i + 14j - k) = (-22, 14, -1)$

''

$-8x - 2y + 5z$ (37

الحل :

$-8x - 2y + 5z = -8(-9i + 4j + 3k) - 2(6i - 2j - 7k) + 5(-2i + 2j + 4k)$
$= (72i - 32j - 24k) + (-12i + 4j + 14k) + (-10i + 10j + 20k)$
$= (50i - 18j + 10k) = (50, -18, 10)$

''

$-6y - 9z$ (38

الحل : $-6y - 9z = -6(6i - 2j - 7k) - 9(-2i + 2j + 4k)$
$= (-36i + 12j + 42k) + (18i - 18j - 36k)$
$= (-18i - 6j + 6k) = (-18, -6, 6)$

''

$-x - 4y - z$ (39

الحل :

$-x - 4y - z = -(-9i + 4j + 3k) - 4(6i - 2j - 7k) - (-2i + 2j + 4k)$
$= (9i - 4j - 3k) + (-24i + 8j + 28k) + (2i - 2j - 4k)$
$= -13i + 2j + 21k = (-13, 2, 21)$

''

إذا كانت N منتصف MP ، فأوجد النقطة P في كل مما يأتي :

$M(3, 4, 5), N(\frac{7}{2}, 1, 2)$ (40

الحل :

$$N = \frac{M + P}{2} \rightarrow N = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

$$\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right) = \left(\frac{x_1 + 3}{2}, \frac{y_1 + 4}{2}, \frac{z_1 + 5}{2}\right)$$

$$\frac{x_1 + 3}{2} = \frac{7}{2} \rightarrow x_1 + 3 = 7 \rightarrow x_1 = 4$$

$$\frac{y_1 + 4}{2} = 1 \rightarrow y_1 + 4 = 2 \rightarrow y_1 = -2$$

$$\frac{z_1+5}{2}=2 \rightarrow z_1+5=4 \rightarrow z_1=-1$$

$\therefore$ **P (4, – 2 , – 1)**

،،

M (– 1 , – 4 , – 9) , N (– 2, 1 , – 5) (41

الحل :

$$N=\frac{M+P}{2} \rightarrow N=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$$

$$(-2,1,-5)=(\frac{x_1-1}{2},\frac{y_1-4}{2},\frac{z_1-9}{2})$$

$$\frac{x_1-1}{2}=-2 \rightarrow x_1-1=-4 \rightarrow x_1=-3$$

$$\frac{y_1-4}{2}=1 \rightarrow y_1-4=2 \rightarrow y_1=6$$

$$\frac{z_1-9}{2}=-5 \rightarrow z_1-9=-10 \rightarrow z_1=-1$$

$\therefore$ **P (– 3, 6 , – 1)**

،،

M (7 , 1 , 5) , N (5 , – $\frac{1}{2}$, 6) (42

الحل :

$$N=\frac{M+P}{2} \rightarrow N=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2})$$

$$(5,-\frac{1}{2},6)=(\frac{x_1+7}{2},\frac{y_1+1}{2},\frac{z_1+5}{2})$$

$$\frac{x_1+7}{2}=5 \rightarrow x_1+7=10 \rightarrow x_1=3$$

$$\frac{y_1+1}{2}=-\frac{1}{2} \rightarrow y_1+1=-1 \rightarrow y_1=-2$$

$$\frac{z_1+5}{2}=6 \rightarrow z_1+5=12 \rightarrow z_1=7$$

،،

الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء 5 ـ 5

الضرب الداخلي في الفضاء :

مفهوم أساسي	الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء
يعرف الضرب الداخلي للمتجهين $a=(a_1,a_2,a_3),b=(b_1,b_2,b_3)$ في الفضاء كالآتي : $a \bullet b = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$ ، ويكون المتجهان a , b متعامدين إذا وفقط إذا كانا $\alpha \bullet b = 0$	

تحقق من فهمك : صـ 41

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

1A) $u = (3, -5, 4), v = (5, 7, 5)$

1B) $u = (4, -2, -3), v = (1, 3, -2)$

الحل : 1A) $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 15 - 35 + 20 = 0 \rightarrow$ المتجهين متعامدان

1B) $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 4 - 6 + 6 = 4 \rightarrow$ المتجهين غير متعامدان

تحقق من فهمك : صـ 41

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $u = -4i + 2j + k$, $v = -4i + 3k$ ، إلي أقرب منزلة عشرية .

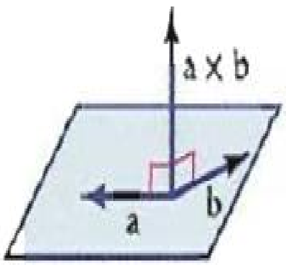
الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(-4,2,1)\bullet(4,0,,3)}{|(-4,2,1)||(4,0,,3)|} = \frac{-16+0+3}{\sqrt{16+4+1}\sqrt{16+9}} = \frac{-13}{5\sqrt{21}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{5\sqrt{21}}\right) \approx 124 \bullet 6$$

الضرب الإتجاهي :

هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء ، وبخلاف الضرب الداخلي ، فإن الضرب الإتجاهي لمتجهين α , b هو متجه وليس عددا ، ويرمز له بالرمز α × b ويقرأ α cross b ويكون المتجه α × b عموديا علي المستوي الذي يحوي المتجهين α , b



الضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء :

مفهوم أساسي	الضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء
إذا كان $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k , b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ ، فإن الضرب الإتجاهي للمتجهين α , b هو المتجه : $\alpha \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i - (a_1 b_3 - a_3 b_1) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k$	

تحقق من فهمك : صـ 42

أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم بين أن u× v يعامد كلا من u , v :

3A) u = (4 , 2 , – 1) , v = (5 , 1 , 4)

3B) u = (– 2 , – 1 , – 3) , v = (5 , 1 , 4)

الحل : (3A

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

= (8 + 1) i – (16+ 5) j + (4 – 10)k = 9 i – 21 j – 6k = (9 , – 21 , – 6)

(u× v) • u = (9 , – 21 , – 6)• (4 , 2 , – 1) = 36 – 42 + 6 = 0

(u× v) • v = (9 , – 21 , – 6) • (5 , 1 , 4) = 45 – 21 – 24 = 0

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

(3B

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

= (– 4 +3) i – (– 8 + 15) j + (– 2 +5)k = – i – 7 j + 3k = (– 1 , – 7 , 3)

(u× v) • u = (– 1 , – 7 , 3) • (– 2 , – 1 , – 3) = 2 + 7 – 9 = 0

(u× v) • v = (– 1 , – 7 , 3) • (5 , 1 , 4) = – 5 – 7 + 12 = 0

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

ملاحظة :

للضرب الإتجاهي تطبيقات هندسية عديدة ، فمثلا يعبر المقدار u× v عن مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران .

تحقق من فهمك : صـ 43

4) أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه :

$u = -6i - 2j + 3k \ , v = 4i + 3j + k$ ضلعان متجاوران

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

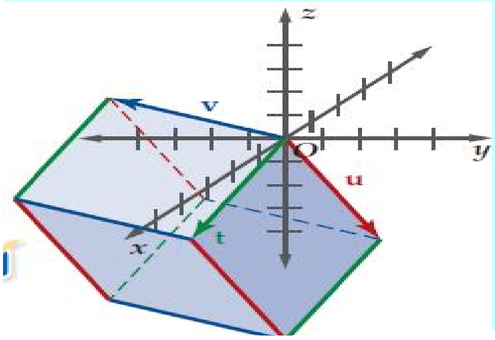
$$= (-2-9)\,i - (-6-12)\,j + (-18+8)\,k = -11\,i + 18\,j - 10k$$

$$= (-11 \, , 18 \, , -10)$$

$$|u \times v| = \sqrt{121 + 324 + 100} = \sqrt{545} \approx 23 \bullet 35$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع = 23 • 35 وحدة مربعة تقريبا

''



ملاحظة : إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية ، فإنها تكون أحرفا متجاورة لمتوازي سطوح ، وهو عبارة عن مجسم متعدد الأوجه ، كل وجه منها علي شكل متوازي أضلاع وأن القيمة المطلقة للضرب القياسي للثلاثيات لهذه المتجهات يمثل حجم متوازي السطوح .

''

الضرب القياسي للثلاثيات :

مفهوم أساسي	الضرب القياسي للثلاثيات
إذا كان $t = t_1 i + t_2 j + t_3 k \ , u = u_1 i + u_2 j + u_3 k \ , v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ فإن الضرب القياسي للثلاثيات يعرف كالآتي : $t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$	

''

تحقق من فهمك : صـ 43

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = -6i - 2j + 3k \ , v = 4i + 3j + k$ ، $t = 2j - 5k$

الحل :

$$t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -6 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$0(-2-9) - 2(-6-12) - 5(-18+8) = 36 + 50 = 86$$

أي أن حجم متوازي السطوح = 86 وحدة مكعبة

''

تدرب وحل المسائل : صـــ 39

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

1) $u = (3, -9, 6)$, $v = (-8, 2, 7)$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = -24 - 18 + 42 = 0 \rightarrow$ المتجهين متعامدان

''

2) $u = (5, 0, -4)$, $v = (6, -1, 4)$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 30 + 0 - 16 = 14 \rightarrow$ المتجهين غير متعامدان

''

3) $u = (-7, -3, 1)$, $v = (-4, 5, -13)$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 28 - 15 - 13 = 0 \rightarrow$ المتجهين متعامدان

''

4) $u = (11, 4, -2)$, $v = (-1, 3, 8)$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = -11 + 12 - 16 = -15 \rightarrow$ المتجهين غير متعامدان

''

5) $u = 6i - 2j - 5k$, $v = 3i - 2j + 6k$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 18 + 4 - 30 = -8 \rightarrow$ المتجهين غير متعامدان

''

6) $u = 9i - 9j + 6k$, $v = 6i + 4j - 3k$

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3$

$u \bullet v = 54 - 36 - 18 = 0 \rightarrow$ المتجهين متعامدان

''

أوجد قياس الزاوية بين المتجهين u , v في كل مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة .

8) $u = (6, -5, 1)$, $v = (-8, -9, 5)$

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(6,-5,1)\bullet(-8,-9,5)}{|(6,-5,1)||(-8,-9,5)|} = \frac{-48+45+5}{\sqrt{36+25+1}\sqrt{64+81+25}} = \frac{2}{12\sqrt{85}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{1}{6\sqrt{85}}\right) \approx 88 \bullet 96$$

‘‘

u = (– 8 , 1 , 12) , v = (– 6 , 4 , 2) (9

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(-8,1,12)\bullet(-6,4,2)}{|(-8,1,12)||(-6,4,2)|} = \frac{48+4+24}{\sqrt{64+1+144}\sqrt{36+16+4}} = \frac{76}{\sqrt{11704}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{76}{\sqrt{11704}}\right) \approx 45 \bullet 4$$

‘‘

u = (10 , 0 , – 8) , v = (3 , – 1 , – 12) (10

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(10,0,-8)\bullet(3,-1,-12)}{|(10,0,-8)||(3,-1,-12)|} = \frac{30+96}{\sqrt{100+64}\sqrt{9+1+144}} = \frac{126}{\sqrt{25256}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{126}{\sqrt{25256}}\right) \approx 37 \bullet 5$$

‘‘

u = – 3 i + 2 j +9k , v = 4 i + 3 j – 10 k   (11

الحل :

$$\cos q = \frac{u \bullet v}{|u||v|} = \frac{(-3,2,9)\bullet(4,3,-10)}{|(-3,2,9)||(4,3,-10)|} = \frac{-12+6-90}{\sqrt{9+4+81}\sqrt{16+9+100}} = \frac{-96}{5\sqrt{470}}$$

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{-96}{5\sqrt{470}}\right) \approx 152 \bullet 3$$

‘‘

أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم بين أن u× v يعامد كلا من u , v :

u = (– 1 , 3 , 5) , v = (2 , – 6 , – 3) (12

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$= (-9 + 30)\, i - (3 - 10)\, j + (6 - 6)k = 21\, i + 7\, j = (21, 7, 0)$

$(u \times v) \bullet u = (21, 7, 0) \bullet (-1, 3, 5) = -21 + 21 + 0 = 0$

$(u \times v) \bullet v = (21, 7, 0) \bullet (2, -6, -3) = 42 - 42 + 0 = 0$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

''

$u = (4, 7, -2),\ v = (-5, 9, 1)$ (13

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$$

$= (7 + 18)\, i - (4 - 10)\, j + (36 + 35)k = 25\, i + 6j + 71k = (25, 6, 71)$

$(u \times v) \bullet u = (25, 6, 71) \bullet (4, 7, -2) = 100 + 42 - 142 = 0$

$(u \times v) \bullet v = (25, 6, 71) \bullet (-5, 9, 1) = -125 + 54 + 71 = 0$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

''

$u = (3, -6, 2),\ v = (1, 5, -8)$ (14

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 5 & -8 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$= (48 - 10)\, i - (-24 - 2)\, j + (15 + 6)k = 38\, i + 6j + 21k = (38, 26, 21)$

$(u \times v) \bullet u = (38, 26, 21) \bullet (3, -6, 2) = 114 - 156 + 42 = 0$

$(u \times v) \bullet v = (38, 26, 21) \bullet (1, 5, -8) = 38 + 130 - 168 = 0$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

''

$u = -2\, i - 2\, j + 5k,\ v = 7\, i + j - 6\, k$ (15

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & -6 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} - j \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -6 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$= (12 - 5)\, i - (12 - 35)\, j + (-2 + 14)k = 7\, i + 23j + 12k = (7, 23, 12)$

$(u \times v) \bullet u = (7, 23, 12) \bullet (-2, -2, 5) = -14 - 46 + 60 = 0$

$(u \times v) \bullet v = (7, 23, 12) \bullet (7, 1, -6) = 49 + 23 - 72 = 0$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفر فإن u× v يعامد كلا من u , v

''

أوجد مساحة سطح متوازي الأضلاع الذي فيه u , v ضلعان متجاوران في كل مما يأتي :

16) u = (– 9 , 1 , 2) , v = (6 , – 5 , 3)

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -9 & 1 & 2 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= (3 + 10)\,i - (-27 - 12)\,j + (45 - 6)k = 13\,i + 39j + 39k = (13 , 39 , 39)$$

$$|u \times v| = \sqrt{169 + 1521 + 1521} = \sqrt{3211} = 13\sqrt{19} \approx 56 \bullet 7$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع = 7 • 56 وحدة مربعة تقريبا

''

17) u = (4 , 3 , – 1) , v = (7 , 2 , – 2)

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-6 + 2)\,i - (-8 + 7)\,j + (8 - 21)k = -4\,i + j - 13k = (-4 , 1 , -13)$$

$$|u \times v| = \sqrt{16 + 1 + 169} = \sqrt{186} \approx 13 \bullet 6$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع = 6 • 13 وحدة مربعة تقريبا

''

18) u = 6 i – 2 j + 5k , v = 5 i – 4 j – 8 k

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -8 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & -8 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= (16 + 20)\,i - (-48 - 25)\,j + (-24 + 10)k = 36\,i + 73j - 14k$$

$$= (36 , 73 , -14)$$

$$|u \times v| = \sqrt{1296 + 5329 + 196} = \sqrt{6821} \approx 82 \bullet 6$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع = 6 • 82 وحدة مربعة تقريبا

''

19) u = i + 4 j – 8k , v = – 2 i +3 j – 7 k

الحل :

$$u \times v = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & -8 \\ -2 & 3 & -7 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix} - j\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (-28 + 24)i - (-7 - 16) + (3 + 8)k = -4\,i - 23j + 11k = (-4 , -23 , 11)$$

$$|u \times v| = \sqrt{16+529+121} = \sqrt{666} = 3\sqrt{74} \approx 25 \bullet 8$$

أي أن مساحة سطح متوازي الأضلاع = 8 • 25 وحدة مربعة تقريبا

''

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه t ، u , v أحرف متجاورة في كل مما يأتي :

(20 t = (– 1 , – 9 , 2) , u = (4 , – 7 , – 5) , v = (3 , – 2 , 6)

الحل :

$$t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 4 & -7 & -5 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

= – 1 (– 42 – 10) + 9 (24 + 15) + 2 (– 8 + 21) = 52 +351 + 26 = 429

أي أن حجم متوازي السطوح = 429 وحدة مكعبة

''

(21 t = (2 , – 3 , – 1) , u = (4 , – 6 , 3) , v = (– 9 , 5 , – 4)

الحل :

$$t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & 3 \\ -9 & 5 & -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -9 & -4 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$$

= 2 (24 – 15) + 3 (– 16 + 27) – 1 (20 – 54) = 18 + 33 + 34 = 85

أي أن حجم متوازي السطوح = 85 وحدة مكعبة

''

(22 t = i + j – 4k , u = – 3 i + 2 j + 7k , v = 2 i – 6 j + 8k

الحل :

$$t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 7 \\ 2 & -6 & 8 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -6 & 8 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

= 1 (16 + 42) – 1 (– 24 –14) – 4 (18 – 4) = 58 + 38 – 56 = 40

أي أن حجم متوازي السطوح = 40 وحدة مكعبة

''

(23 t = 5i – 2 j + 6k , u =3 i – 5 j + 7k , v = 8 i – j + 4k

الحل :

$$t \bullet (u \times v) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 3 & -5 & 7 \\ 8 & -1 & 4 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

= 5 (– 20 + 7) + 2 (12 – 56) + 6 (– 3 + 40) = – 65 – 88 + 222 = 69

أي أن حجم متوازي السطوح = 69 وحدة مكعبة

''

أوجد متجها يعامد المتجه المعطي في كل مما يأتي :

24) (3 , – 8 , 4)

الحل : المتجهان متعامدان فإن $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 = 0$

بوضع $b_1 = 4$ ، $b_2 = 3$ $\rightarrow 3b_1 - 8b_2 + 4b_3 = 0$

$12 - 24 + 4b_3 = 0 \rightarrow 4b_3 = 12 \rightarrow b_3 = 3$

إذن المتجه العمودي هو (4 , 3 , 3)

‘‘

25) (–1 , – 2 , 5)

الحل : المتجهان متعامدان فإن $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 = 0$

بوضع $b_1 = 5$ ، $b_2 = 5$ $\rightarrow -b_1 - 2b_2 + 5b_3 = 0$

$-5 - 10 + 5b_3 = 0 \rightarrow 5b_3 = 15 \rightarrow b_3 = 3$

إذن المتجه العمودي هو (5 , 5 , 3)

‘‘

إذا علم كل من u • v فأوجد u في كل مما يأتي :

28) v = (2 , – 4 , – 6) , v = – 22

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 \rightarrow -22 = 2b_1 - 4b_2 - 6b_3$

$b_2 = 2$ ، $b_1 = 2$ بوضع $\rightarrow -22 = 4 - 8 - 6b_3 \rightarrow 6b_3 = 13 \rightarrow b_3 = 3$

إذن المتجه : u = (2 , 2 , 3)

‘‘

30) v = (– 2 , – 6 , – 5) , v = 35

الحل : $u \bullet v = a_1 \bullet b_1 + a_2 \bullet b_2 + a_3 \bullet b_3 \rightarrow 35 = -2b_1 - 6b_2 - 5b_3$

$b_2 = 1$ ، $b_1 = 2$ بوضع $\rightarrow 35 = -4 - 6 - 5b_3 \rightarrow 5b_3 = -45 \rightarrow b_3 = -9$

إذن المتجه : u = (2 , 1 , – 9)

‘‘

حدد ماإذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أولا :

33) m = (2 , – 10 , 6) , n = (3 , – 15 , 9)

الحل : لكي يكون المتجهين متوازيين لابد من توافر الشرط $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{3} , \frac{a_2}{b_2} = \frac{-10}{-15} = \frac{2}{3} , \frac{a_3}{b_3} = \frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$$

المتجهين متوازيين

(34 $a = (6, 3, -7)$, $b = (-4, -2, 3)$

الحل : لكي يكون المتجهين متوازيين لابد من توافر الشرط $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \ , \ \frac{a_2}{b_2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2} \ , \ \frac{a_3}{b_3} = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$$

المتجهين غير متوازيين

دليل الدراسة والمراجعة :

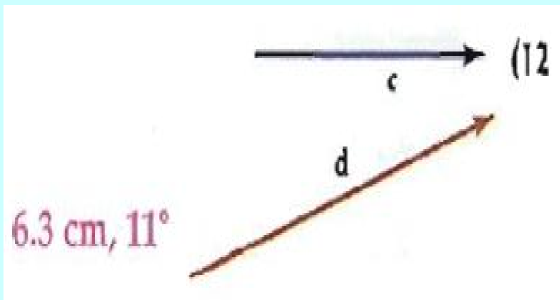
1 – 5 مقدمة في المتجهات :

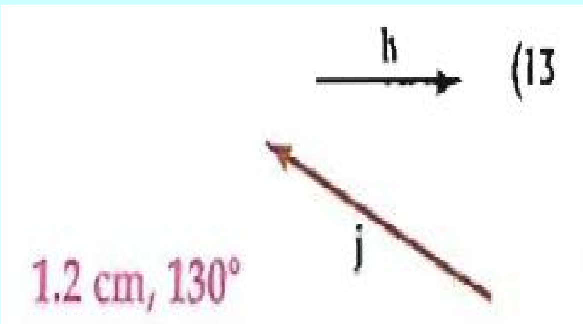
حدد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية في كل مما يأتي :

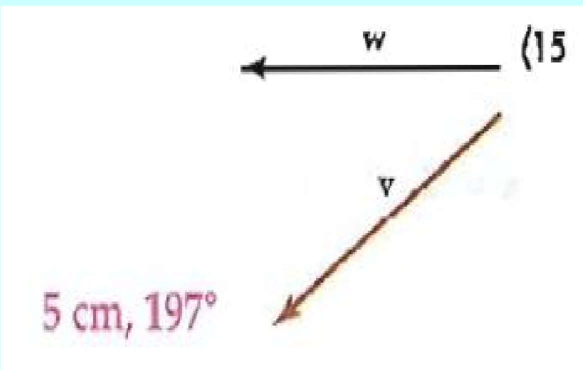
10) تسير سيارة بسرعة 50mi / h باتجاه الشرق .

11) شجرة طولها 20ft .

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث ، أو قاعدة متوازي الأضلاع ، قرب المحصلة لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر ، ثم حدد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملا المسطرة والمنقلة .







أوجد طول المحصلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كل مما يأتي :

16) 70m باتجاه الغرب ، ثم 150m باتجاه الشرق .

17) 8N للخلف ن ، 12N للخلف

''

2 – 5 المتجهات في المستوى ألإحداثي :

أوجد الصورة الإحداثية وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كل مما يأتي

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$

''

إذا كان $t(-4, 2)$, $q(-2, -3)$, $p(4, 0)$ ، فأوجد كلا مما يأتي :

22) $2q - p$ 23) $p + 2t$ 24) $t - 3p + q$ 25) $p2 + t - 3q$

''

أوجد متجه وحدة u باتجاه v في كل مما يأتي :

26) $v = (-7, 2)$ 27) $v = (3, -3)$

26) $v = (-5, -8)$ 26) $v = (9, 3)$

''

3 – 5 الضرب الداخلي :

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم تحقق مما يأتي إذا كانا متعامدين أو لا :

30) $u = (-3, 5), v = (2, 1)$

31) $u = (4, 4), v = (5, 7)$

32) $u = (-1, 4), v = (8, 2)$

33) $u = (-2, 3), v = (1, 3)$

''

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين u , v في كل مما يأتي

30) $u = (5, -1), v = (-2, 3)$

31) $u = (-1, 8), v = (4, 2)$

''

5 – 4　المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد :

عين كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد :

36) (1 , 2 , – 4)

37) (3 , 5 , 3)

38) (5 , – 3 , – 2)

39) (– 2 , – 3 , – 2)

،،

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا طرفيها في كل مما يأتي ، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها :

40) (– 4 , 10 , 4) , (2 , 0 , 8)

41) (– 5 , 6 , 4) , (– 9 , – 2 , – 2)

42) (3 , 2 , 0) , (– 9 , – 10 , 4)

43) (8 , 3 , 2) , (– 4 , – 6 , 6)

،،

مثل بيانيا كلا من المتجهات الآتية في الفضاء :

44) $a = (0 , -3 , 4)$　　45) $b = -3i + 3j + 2k$

46) $c = -2i - 3j + 5k$　　47) $d = (-4 , -5 , -3)$

،،

5 – 5　الضرب الداخلي والضرب الإتجاهي للمتجهات في الفضاء :

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم حدد ما إذا كانا متعامدين أم لا :

48) $u = (2 , 5 , 2) , v = (8 , 2 , -13)$

49) $u = (5 , 0 , -6) , v = (-6 , 1 , 3)$

،،

أوجد الضرب الإتجاهي للمتجهين u , v في كل مما يأتي ، ثم بين أن $u \times v$ يعامد كلا من u , v :

50) $u = (1 , -3 , -2) , v = (2 , 4 , -3)$

51) $u = (4 , 1 , -2) , v = (5 , -4 , -1)$

،،